Análisis de Señales y Sistemas Lineales

Apuntes de clase.Tema IV. Función de Transferencia

Ing. A. Osman

Universidad de Carabobo
Facultad de Ingeniería
Escuela de Telecomunicaciones
Departamento de Señales y Sistemas
aosman@uc.edu.ve

29 de noviembre de 2018

Índice

Índice

Índice

Definición de la Transformada bilateral de Laplace

La transformada de laplace bilateral es la generalización de la Transformada de Fourier en tiempo continuo y se define como:

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st}dt \tag{1}$$

donde $s = \sigma + j\omega$. Cuando s es puramente imaginaria la expresión anterior conduce a la Transformada de Fourier. La transformada unilateral de Laplace tiene una forma similar a la ecuación 5 pero con límites de integración desde 0 hasta ∞. En las láminas subsiguientes se hará referencia a la transformada bilateral de Laplace, por lo tanto se omitirá el término bilateral.

Existencia de la Transformada de Laplace.

Considere la señal:

$$x(t) = e^{-at}\mu(t)$$

- Calcular la CFT para $a > 0$, para $a = 0$ y para $a < 0$.[1]
- Calcular la Transformada de Laplace y determinar ROC.

Considere la señal:

$$x(t) = e^{-2t}\mu(t) + e^{-t}cos(3t)\mu(t)$$

- Calcular la Transformada de Laplace y determinar ROC.
- Dibujar el diagrama de polos(x) y ceros(o) en el plano s.

[1] Si a es negativa o cero, la transformada de laplace aún existe pero no así la transformada de fourier.

Índice

La ROC de la Transformada de Laplace

La ROC de la transformada de Laplace de $x(t)$ consiste en aquellos valores de s para los cuales $x(t)e^{-\alpha t}$ es absolutamente integrable. Esto es:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|e^{-\alpha t} dt < \infty$$

Propiedades:

- La ROC de $X(s)$ consiste en bandas paralelas al eje $j\omega$ en el plano s.
- Para transformadas racionales de laplace la ROC no contiene ningún polo.
- Si $x(t)$ es de duración finita y es absolutamente integrable, entonces la ROC es la totalidad del plano complejo s.

Índice

La Transformada inversa de Laplace

Partiendo de la interpretación de la transformada de laplace como la transformada de fourier de una versión exponencialmente ponderada de la señal, esto es:

$$x(\sigma + j\omega) = Fx(t)e^{-\sigma t} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-\sigma t}e^{-j\omega t}dt$$

para valores de $s = \sigma + j\omega$ en la ROC y aplicando transformada inversa de Fourier, obtenemos:

$$x(t)e^{-\sigma t} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} x(\sigma + j\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} x(\sigma + j\omega)e^{(\sigma + j\omega)t}d\omega$$

y finalmente:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} x(s)e^{st}ds$$

Índice

Evaluación Geométrica de la CFT a partir del diagrama de polos y ceros.

A partir de la expresión de la transformada de laplace mas general de tipo racional

$$X(s) = M\frac{\prod_{i=1}^{r} x_i(s-\beta_i)}{\prod_{j=1}^{p} x_j(s-\alpha_i)}$$

se puede analizar lo siguiente:

- Si evaluamos $X(s)$ en $s = s_1$ cada factor del producto se puede representar como un vector que va desde el cero o el polo hasta el punto s_1
- La magnitud de $X(s_1)$ es entonces la magnitud del factor de escala M, multplicadado por el producto de todas las longitudes de los vectores correspondientes a los ceros, dividido por el producto de las longitudes de los vectores correspondientes a los polos.

Evaluación Geométrica de la CFT a partir del diagrama de polos y ceros.

- De la misma manera, el ángulo del $X(s_1)$ es la suma de los ángulos de los vectores cero menos las suma de los ángulos de los vectores polo. Si M es negativo, debe incluirse un ángulo adicional de π.
- Es así como en el caso en que se tome $s_1 = j\omega$ entonces el procedimiento descrito anteriormente nos permite calcular la magnitud y la fase de la Transformada de Fourier a partir del diagrama de polos y ceros de la Transformada de Laplace.

.

Propiedades y pares transformados

Las propiedades y pares transformados son tabulaciones que pueden encontrar en las páginas 691 y 692 del [1]

Índice

Sistemas causales y estables

Teoremas:

- Para determinar la transformada inversa de un a función de tranferencia, necesariamente se debe saber la ROC a aplicar, ya que sin la ROC, habría múltiples respuestas impulsivas.
- Un sistema causal tiene la ROC en el plano derecho del polo más a la derecha.
- Un sistema es estable si la ROC incluye el eje $j\omega$.
- Un sistema causal con función del sistema $H(s)$ racional es estable, si y solo si, todos los polos de $H(s)$ caen en la parte izquierda del plano S.
- Una señal derecha tiene la ROC hacia la derecha, una señal izquierda tiene su ROC a la izquierda, una señal bilateral tiene su ROC en forma de banda paralela al eje $j\omega$

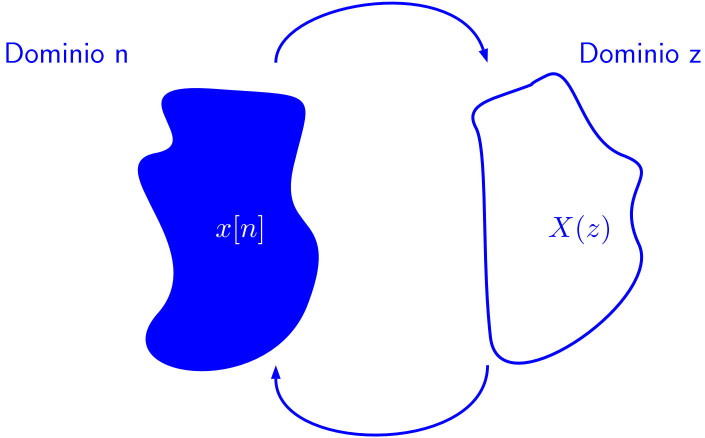
Índice

Índice

El concepto de la transformada Z

- La Transformada Z es una técnica de transformación que convierte elementos de un dominio de salida de secuencias discretas a un dominio de llegada de funciones de variable compleja. [2]
- Entre sus usos más comunes se tiene la obtención de funciones de transferencia, simplificación e implementación de estructuras de sistemas discretos y análisis de estabilidad y causalidad.[2][3]
- Desempeña el mismo papel en el análisis de las señales discretas en el tiempo y los sistemas LTI que la transformada de Laplace en el análisis de las señales continuas en el tiempo y los sistemas LTI.[2]

Diagrama de conjunto de la Transformada Z



Índice

Definición

Dada una secuencia discreta x(n), *la transformada Z bilateral directa*[2] es una serie de potencias que se puede escribir como la ecuación 2

$$X(Z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n} \tag{2}$$

La variable z es compleja, y se expresa en forma polar como en la ecuación 3, donde r es es la magnitud de z y ω su ángulo.

$$z = re^{j\omega} \tag{3}$$

[2] El procedimiento inverso, se conoce como transformada z inversa y se estudiará posteriormente.

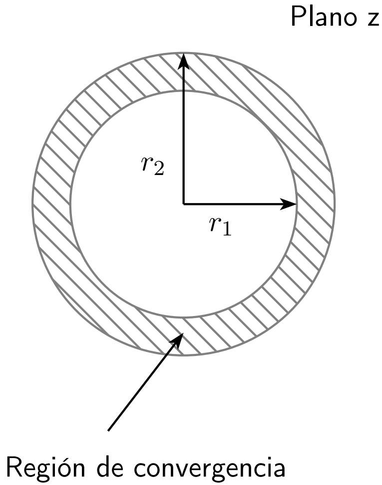
Índice

Región de convergencia

La transformada z es una serie infinita de potencias que sólo existe para aquellos valores de z para los que la serie converge. Este conjunto de valores recibe el nombre de *región de convergencia* o *region of convergence* (ROC).

$$|X(z)| = |\sum_{-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}| \leq \sum_{-\infty}^{\infty} |x(n)z^{-n}| =$$
$$\sum_{-\infty}^{\infty} |x(n)(re^{j\omega})^{-n}| = \sum_{-\infty}^{\infty} |x(n)r^{-n}e^{-j\omega n}| =$$
$$\sum_{-\infty}^{\infty} |x(n)r^{-n}| < \infty \tag{4}$$

Región de convergencia



Conforme r_1 y r_2
tomen valores entre o e ∞
se van conformando
las distintas ROC

Propiedades de la región de convergencia

1. La ROC debe ser una región conexa.
2. Para secuencias bilaterales la ROC consiste en un anillo centrado en el origen.
3. La ROC no contiene ningún polo de la transformada z.
4. Si x[n] es finita la ROC es todo el plano complejo excepto, posiblemente z=0 y $z \to \infty$.
5. Si x[n] es causal, x[n]=0 $\forall n < 0$, la ROC es el exterior de una circunferencia cuyo radio se corresponde con el polo de la transformada Z mayor en valor absoluto.

Propiedades de la región de convergencia(continuación)

1. Si x[n] es estrictamente anticausal, x[n]=0 $\forall n > 0$, es el interior de la circunferencia con radio igual al polo de menor valor absoluto de la transformada Z.
2. La DTFT converge si o solo si la ROc contiene a la circunferencia unidad, es decir $\mid z \mid = 1$
3. Para sistemas estables la ROC debe incluir a la circunferencia unidad.
4. Para secuencias bilaterales el sistema es no causal.
5. Para sistemas causales la secuencia estará limitada por la izquierda.

Índice

Ejemplo 1

Sea $h(n) = 3\delta(n)$ entonces

$$H(Z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} 3\delta(n)z^{-n} = 3z^{-0} = 3; \forall z$$

Es decir, la transformada Z de $h(n)$ es 1 y la ROC es todo el plano z.

Ejemplo 2

Sea $h(n)=\{1,\frac{1}{2},(\frac{1}{2})^2,(\frac{1}{2})^3,...,(\frac{1}{2})^n,...\}$ entonces

$$H(z)=1+\frac{1}{2}z^{-1}+(\frac{1}{2})^2z^{-2}+(\frac{1}{2})^3z^{-3}+...+(\frac{1}{2})^nz^{-n}+...$$

$$H(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{2})^nz^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{2}z^{-1})^n$$

Para que $H(z)$ se finita $|\frac{1}{2}z^{-1}|$ debe ser menor que 1, por lo tanto la ROC es $|z|>\frac{1}{2}$

Índice

Algunas propiedades

1. $ax[n] + bx[n] \longleftrightarrow aX(z) + bY(z) \rightarrow$ contiene a $R_x \cap R_y$
2. $x[n-n_0] \longleftrightarrow z^{-n_0}X(z) \rightarrow R_x$ (adición o eliminación: origen o ∞)
3. $x[-n] \longleftrightarrow X(1/z) \rightarrow 1/R_x$
4. $z_0^n x[n] \longleftrightarrow X\left(z/z_0\right) \rightarrow |z_o|R_x$
5. $nx[n] \longleftrightarrow -z\frac{dX(z)}{dz} \rightarrow R_x$ (adición o eliminación: origen o ∞)
6. $n^k x[n] \longleftrightarrow -z\frac{d\mathcal{Z}\left(n^{k-1}x[n]\right)}{dz} \rightarrow R_x$ (adición o eliminación: origen o ∞)
7. $x[n] * y[n] \longleftrightarrow X(z)Y(z) \rightarrow$ contiene a $R_x \cap R_y$ (Cumple solo si el sist es LTI)

Índice

Relación entre la Transformada Z y la Transformada de Fourier

Sustituyendo 3 en 2

$$X(re^{-j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n](re^{-j\omega})^{-n} \tag{5}$$

Si r=1, la ecucación 5 se reduce a la transformada de fourier en tiempo discreto.

Índice

Pares transformados más comunes

1. $\delta\left[n\right] \longleftrightarrow 1$; todo z
2. $\delta\left[n-m\right] \longleftrightarrow z^{-m}$; todo z excepto 0 (m>0) o ∞ (m<0)
3. $a^{n}\mu[n] \longleftrightarrow \dfrac{1}{1-az^{-1}}; |z| > |a|$
4. $-a^{n}\mu[-n-1] \longleftrightarrow \dfrac{1}{1-az^{-1}}; |z| < |a|$
5. $na^{n}\mu[n] \longleftrightarrow \dfrac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^{2}}; |z| > |a|$

Pares transformados más comunes (continuación)

1. $-na^n\mu[-n-1] \longleftrightarrow \dfrac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}; |z| < |a|$
2. $r^n\cos(\omega_o n)\mu[n] \longleftrightarrow \dfrac{1 - r\cos(\omega_o)z^{-1}}{1-2r\cos(\omega_o)z^{-1}+r^2z^{-2}}; |z| > r$
3. $r^n\sin(\omega_o n)\mu[n] \longleftrightarrow \dfrac{r\sin(\omega_o)z^{-1}}{1-2r\cos(\omega_o)z^{-1}+r^2z^{-2}}; |z| > r$
4. $x[n] = \begin{cases} a^n, 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, resto \end{cases} \longleftrightarrow \dfrac{1-a^Nz^{-N}}{1-az^{-1}}; |z| > 0$

Índice

Transformada z inversa

- El método de inspección consiste en reconocer, por simple inspección, ciertas parejas de transformadas. Las tablas de transformadas Z, tienen muchísima utilidad para aplicar este método.
- La expansión en fracciones parciales es de mucha utilidad en aquellos casos en los que $X(z)$ no se puede encontrar explícitamente utilizando una tabla, pero puede ser posible obtener una expresión alternativa como suma de términos más simples que sí se encuentren tabulados; este es el caso de las funciones racionales.
- Otra opción es determinar el desarrollo en serie de potencias de $X(z)$ y aplicar la propiedad de linealidad.

Índice

Índice

Respuesta en frecuencia de un sistema LTI en tiempo continuo.

La respuesta en frecuencia de un sistema LTI en tiempo continuo viene dada por las siguientes expresiones:

$$Y(j\omega) = H(j\omega)X(j\omega) \tag{6}$$

Donde:

$$|Y(j\omega)| = |H(j\omega)||X(j\omega)|$$

y

$$\measuredangle Y(j\omega) = \measuredangle H(j\omega) + \measuredangle X(j\omega)$$

Acá, $H(j\omega)$ se denomina **respuesta en frecuencia** del sistema LTI.

Respuesta en frecuencia de un sistema LTI en tiempo discreto.

La respuesta en frecuencia de un sistema LTI en tiempo discreto viene dada por la siguiente expresión:

$$Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})X(e^{j\omega}) \tag{7}$$

Donde:

$$|Y(e^{j\omega})| = |H(e^{j\omega})||X(e^{j\omega})|$$

y

$$\measuredangle Y(e^{j\omega}) = \measuredangle H(e^{j\omega}) + \measuredangle X(e^{j\omega})$$

Acá, $H(e^{j\omega})$ se denomina **respuesta en frecuencia** del sistema LTI.

Ganancia y fase de un sistema LTI

Sabiendo que:

$$H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})|e^{\measuredangle H(e^{j\omega})}$$

o

$$H(j\omega) = |H(j\omega)|e^{\measuredangle H(j\omega)}$$

a $|H(e^{j\omega})|$ o $|H(j\omega)|$ se le denomina **Ganancia** del Sistema LTI. El efecto que tiene un sistema LTI sobre la magnitud de la T.F. de la salida es el de **escalamiento**, cuyo factor corresponde a la magnitud de la respuesta en frecuencia.

A las expresiones $\measuredangle H(e^{j\omega})$ o $\measuredangle H(j\omega)$ se le denomina **fase** del sistema. El efecto que tiene un sistema LTI sobre la fase de la T.F. de la salida es el de **desplazamiento de fase**.

Fase lineal

- Si $\measuredangle H(j\omega) = -\omega t_o$ el sistema es de fase lineal e imparte un retardo de t_o en el tiempo.

Fase no lineal

- En el caso en que la fase de una respuesta en frecuencia no es lineal, entonces la curva de la fase se puede aproximar a un polinomio de taylor o a una linea recta si el rango de frecuencia a considerar es bastante pequeño. En el caso en que la fase de la respuesta en frecuencia sea $\measuredangle H(j\omega) = \phi + \alpha\omega$ esta incide de manera no lineal en la entrada del sistema ocasionando distorsión o cambio de forma de la señal en el tiempo. A α se le denomina **retardo de grupo** y representa el retardo común efectivo por la pequeńa banda o grupo de frecuencias centradas en $\omega = \omega_o$. Matemáticamente se define como:

$$\tau(\omega) = -\frac{d}{d\omega}\measuredangle\{H(j\omega)\}$$

Respuesta en frecuencia de un sistema discreto de segundo orden.

Dado el sistema:

$$y[n] - 2rcos\theta y[n-1] + r^2 y[n-2] = x[n]$$

donde: $r = \frac{3}{4}$ y $\theta = \frac{\pi}{4}$.
a) Determine la respuesta en frecuencia del sistema.
b) Determine la respuesta impulsiva del sistema.
c) Determine la salida para una entrada escalón unitario.
d) Dibuje los gráficos de magnitud y fase de la respuesta en frecuencia entre $-\pi$ y π.

Índice

El decibelio.

Definición:

El decibelio es una unidad relativa empleada en las telecomunicaciones y otras especialidades para expresar la relación entre dos magnitudes: la magnitud estudiada y una magnitud de referencia. Es una unidad logarítmica, adimensional y matemáticamente escalar. Es la décima parte de un belio, que es el logaritmo de la relación entre la magnitud estudiada y la de referencia.

$$P_{in} \longrightarrow \boxed{\textsf{Sistema}} \longrightarrow P_{out} \tag{8}$$

El decibelio. Relaciones

- Primera relación de escalamiento:

$$1B \rightarrow 10dB$$

- En función de la potencia:

$$\alpha dB = 10log(\frac{P_2}{P_1})$$

- En función del voltaje

$$\beta dB = 20log(\frac{V_2}{V_1})$$

El decibelio. Ensayos

- 0dB
- Si P_2 es el doble de P_1 $\rightarrow$ 3 dB
- Si P_2 es 10 veces P_1 $\rightarrow$ 10 dB
- Si P_2 es 100 veces P_1 $\rightarrow$ 20 dB
- Si P_2 es 1000 veces P_1 $\rightarrow$ 30 dB

Conclusión: Un incremento de 10 dB significa un incremento de un factor de 10 en la escala lineal.

El decibelio. Tipos.

- dB_{spl}**(auditivo):** 0 dB es umbral de audición del ser humano, que por convención se estima que equivale a un sonido con una presión de 20 micropascales.
- **dBm:** $\alpha dBm = 10log(\frac{P_2}{1mW})$
- **dBu:** $\alpha dBm = 20log(\frac{V_2}{0{,}7746V})$
- **dBW:** $\alpha dBm = 10log(\frac{P_2}{1W})$
- **dBc:** Nivel relativo entre una señal portadora (carrier) y alguno de sus armónicos.
- **dBi:** Decibelios medidos con respecto a una antena isotrópica.

El decibelio. Aplicación.

- Ejemplo: Calcular la diferencia de potencia lineal de dos señales separadas 60 dB.
- Escala logarítmica de relación de potencia. (eje de las ordenadas)
- Mapeo de la escala logarítmica directa $log(\omega)$ (eje de las abscisas)

Índice

Respuesta en frecuencia de un sistema continuo de primer orden.

Para un sistema descrito como:

$$a\frac{d}{dt}y(t) + y(t) = x(t)$$

al aplicar la CFT se obtiene: $H(j\omega) = \frac{1}{j\omega a+1}$, donde:

$$|H(j\omega)| = \sqrt{\frac{1}{1+(\omega a)^2}}$$

y

$$\measuredangle H(j\omega) = -tan^{-1}(\omega a)$$

Aproximación lineal de la ganancia.

Aplicando logaritmo en base diez a $|H(j\omega)|$ se obtiene:

$$\alpha = 20log|H(j\omega)| = 20log\sqrt{\frac{1}{1+(\omega a)^2}} = -10log[(\omega a)^2 + 1]$$

de donde:

a) Si $\omega a << 1$ o $\omega << \frac{1}{a}$ entonces $\alpha = 0$.

b) Si $\omega a >> 1$ o $\omega >> \frac{1}{a}$ entonces:

$$\alpha = -10log[(\omega a)^2 + 1] = -10log[(\omega a)^2] = -20log[(\omega a)]$$

y

$$\alpha = -20log[(\omega)] + -20log(a)$$

c) Corte de las dos rectas (para $alpha = 0$): $log[(\omega)] = -log(a) \Rightarrow \omega = \frac{1}{a}$

Aproximación lineal de la fase.

$$\measuredangle H(j\omega) = \begin{cases} 0, & \text{si } \omega \leq \frac{0{,}1}{a}. \\ -\frac{\pi}{4}[log(\omega a) + 1], & \text{si } \frac{0{,}1}{a} \leq \omega \leq \frac{10}{a}. \\ -\frac{\pi}{2}, & \text{si } \omega \geq \frac{10}{a}. \end{cases}$$

Procedimiento:

- Evaluar la fase para cuando $\omega a \to 0$
- Evaluar la fase para cuando $\omega a \to \infty$
- Evaluar la fase para cuando $\omega a = 1$ (frecuencia de quiebre de la ganancia)
- Asumir una recta de pendiente $-\frac{\pi}{4}$ que pase por el punto $(\frac{1}{a}, -\frac{\pi}{4})$
- Calcular la recta de la forma $y = mx + b$ donde $x = log(\omega a)$

Diagramas notables.

- $H(j\omega) = k$
- $H(j\omega) = j\omega$
- $H(j\omega) = \frac{1}{j\omega}$
- $H(j\omega) = \frac{1}{j\omega+c}$
- $H(j\omega) = j\omega + c$
- $H(j\omega) = \frac{\omega_n^2}{(j\omega)^2+2\delta\omega_n+\omega_n^2}$: Arranca a 0 dB frecuencia d corte ω_n, factor de amortiguamiento mayor a 0.7 la curva pasa por debajo; si es menor a 0.7 la curva tiene un codo en frecuencia de corte. El rango de la fase el π y decae a 90 grados por década entre $0{,}1\omega_n$ y $10\omega_n$.
- $H(j\omega) = \frac{1}{\omega_n^2}((j\omega)^2 + 2\delta\omega_n + \omega_n^2)$: Arranca a 0 dB, frecuencia d corte ω_n, factor de amortiguamiento mayor a 0.7 la curva pasa por encima; si es menor a 0.7 la curva tiene un codo en frecuencia de corte. El rango de la fase el π y crece a 90 grados por década entre $0{,}1\omega_n$ y $10\omega_n$.

Problema. Bode continuo.

- Determine el diagrama de bode de amplitud y de fase para el sistema con repuesta en frecuencia como sigue:

$$H(j\omega) = \frac{100(1 + j\omega)}{(10 + j\omega)(100 + j\omega)}$$

Problema. Bode discreto. Transformación bilineal.

Transformación bilineal

$$e^{-j\omega} = \frac{1 - jW}{1 + jW} \tag{9}$$

donde: $W = \frac{sen(\omega)}{cos(\omega)+1} = \tan(\frac{\omega}{2})$ es la frecuencia auxiliar de mapeo.[3]

[3] En este caso el bode es periódico con período 2π. En la transformación anterior, cuando W tiende a 0 entonces ω tiende a 0 y cuando W tiende a ∞ entonces ω tiende a π.

Referencias

A.V. Oppenheim, A.S. Willsky, and S.H. Nawab.
Signals and Systems.
Prentice-Hall signal processing series. Prentice Hall, 1997.

Dimitris G. Proakis, John G.; Manolakis.
Tratamiento Digital de Señales.
Prentice Hall. Madrid. ES. 4a ed. 1048 p., Reading, MA, 2007.

Ronald W. Oppenheim, Alan V.; Schafer.
Tratamiento de Señales en tiempo discreto.
Prentice Hall. Madrid. ES. 2a ed. 873 p., Reading, MA, 2000.