Análisis de Señales y Sistemas Lineales

Apuntes de clase. Tema II. Sistemas continuos y discretos

Ing. A. Osman

Universidad de Carabobo
Facultad de Ingeniería
Escuela de Telecomunicaciones
Departamento de Señales y Sistemas
aosman@uc.edu.ve

29 de noviembre de 2018

Índice

1. Sistemas
    - Sistemas continuos y discretos
    - Propiedades básicas de los sistemas
    - Suma de convolución
    - Integral de convolución
    - Propiedades de los sistemas LTI
    - CLTIS descritos por ecuaciones en diferencia

Índice

1 Sistemas
- Sistemas continuos y discretos
- Propiedades básicas de los sistemas
- Suma de convolución
- Integral de convolución
- Propiedades de los sistemas LTI
- CLTIS descritos por ecuaciones en diferencia

Índice

1 Sistemas
- Sistemas continuos y discretos
- Propiedades básicas de los sistemas
- Suma de convolución
- Integral de convolución
- Propiedades de los sistemas LTI
- CLTIS descritos por ecuaciones en diferencia

Notación y diagrama de bloque

$$x(t) \longrightarrow \boxed{\text{Sistema continuo}} \longrightarrow y(t)$$

$$x[n] \longrightarrow \boxed{\text{Sistema discreto}} \longrightarrow y[n]$$

Interconexiones de sistemas:

- Cascada
- Paralelo
- Realimentado

Índice

1 Sistemas
- Sistemas continuos y discretos
- Propiedades básicas de los sistemas
- Suma de convolución
- Integral de convolución
- Propiedades de los sistemas LTI
- CLTIS descritos por ecuaciones en diferencia

Propiedades básicas de los sistemas

- **Causalidad**: Un sistema es causal si la salida no anticipa valores futuros de la entrada, es decir.
- **Linealidad**: Un sistema es lineal si cumple con la propiedad de superposición.
- **Invarianza**: Un sistema es invariante en el tiempo si su comportamiento es el mismo independientemente del tiempo en que suceda.
- **Invertibilidad**:Un sistema es invertible si para distintas entradas se producen distintas salidas.
- **Estabilidad**:Un sistema es estable si para entradas acotadas la salida es acotada.
- **Con memoria y sin memoria**:Un sistema es si memoria si la salida del sistema depente solo del tiempo presente.

Índice

1 Sistemas

Sistemas continuos y discretos

Propiedades básicas de los sistemas

Suma de convolución

Integral de convolución

Propiedades de los sistemas LTI

CLTIS descritos por ecuaciones en diferencia

Suma de convolución

Definición

La suma de convolución es una operación algebráica que se realiza entre dos señales de tiempo discreto y se define de la siguiente manera:

$$y[n] = x[n] * h[n]$$

Esto último representa la siguiente operación:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] \tag{1}$$

- Convolución con $\delta[n-n_o]$ genera replicas en $n = n_o$
- La ecuación 1 se puede analizar de manera gráfica, con matrices movibles o resolviendo la sumatoria.

Índice

1 Sistemas
- Sistemas continuos y discretos
- Propiedades básicas de los sistemas
- Suma de convolución
- Integral de convolución
- Propiedades de los sistemas LTI
- CLTIS descritos por ecuaciones en diferencia

Integral de convolución

Definición

La integral de convolución es una operación algebráica que se realiza entre dos señales de tiempo continuo y se define de la siguiente manera:

$$y(t) = x(t) * h(t)$$

Esto último representa la siguiente operación:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau \tag{2}$$

- Convolución con $\delta(t - t_o)$ genera replicas en $t = t_o$
- Un concepto de convolución es la superposición de las contribuciones impulsivas de la entrada de un LTI sobre su salida a través de dicho sistema.

Algunas observaciones sobre la convolución

- En el método gráfico, si la función viajera queda contenida dentro la función estática, la integral de convolución contiene límites variables dependientes de t.
- En el método gráfico, si la función viajera contiene a la función estática, la integral de convolución contiene límites constantes y el resultado de la convoulción es una constante.
- En el método gráfico, lo más recomendable es que las ecuaciones de los lugares geométricos se saquen en el diagrama de la función viajera.

Algunas observaciones sobre la convolución

- En el método gráfico, si una de las señales es periódica, se deja fija la señal periódica y se realiza la convolución con t transcurriendo durante un periodo, tomando en cuenta que mientras que la función viajera esté entrando al período, la cola de la misma está interactuando con parte de la función que está afuera del período.
- En el método gráfico, en el caso en que ambas señales sean periódicas, estas deben tener el mismo período, al igual que la señal resultante. El proceso puede ser visto como una convolución lineal, realizada dentro de un período, más el aliasing que se origina por el desbordamiento.

Índice

1 Sistemas

- Sistemas continuos y discretos
- Propiedades básicas de los sistemas
- Suma de convolución
- Integral de convolución
- Propiedades de los sistemas LTI
- CLTIS descritos por ecuaciones en diferencia

Propiedades de los sistemas L.T.I. y su respuesta a una entrada arbitraria

- Respuesta de un sistema LTI en función de la respuesta al impulso.
- Conmutatividad.
- Distributividad.
- Asociatividad.
- Sistemas LTI sin memoria.
- Sistemas LTI invertibles.
- Sistemas LTI estables.
- Sistemas LTI causales.
- Respuesta al impulso.
- Respuesta de un sistema LTI al esclón unitario

Respuesta de un sistema Lineal e Invariante en el tiempo

Definición

Para un sistema LTI las ecuaciones 1 y 2 representan las respuestas en el dominio del tiempo $y[n]$ y $y(t)$ para entradas $x[n]$ y $x(t)$ respectivamente; donde $h[n]$ y $h(t)$ representan las respuestas del sistemas LTI a la señal impulso unitario.[1][2]

Además, los sistemas LTI cumplen con las siguientes propiedades:

- Conmutatividad: $x[n] * h[n] = h[n] * x[n]$
- Distributividad: $x[n] * [h_1[n] + h_2[n]] = x[n] * h_1[n] + x[n] * h_2[n]$
- Asociatividad: $x[n] * [h_1[n] * h_2[n]] = [x[n] * h_1[n]] * h_2[n]$

Propiedades de los sistemas LTI. (Se cumplen de igual manera para los sistemas continuos)

- Sistemas LTI sin memoria: $h[n] = k\delta[n]$
- Sistemas LTI invertibles: Si $h_1[n]$ es la respuesta impulsiva del sistema inverso entonces $h[n] * h_1[n] = \delta[n]$
- Sistemas LTI causales: $h[n] = 0 \vee n < 0$
- Sistemas LTI estables:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| < \infty$$

Respuesta de un sistema LTI al escalón unitario.

En tiempo discreto:

$$s[n] = \mu[n] * h[n]$$

$$h[n] = s[n] - s[n-1]$$

En tiempo continuo:

$$s(t) = \mu(t) * h(t)$$

$$h(t) = \frac{ds(t)}{dt}$$

Índice

1 Sistemas
- Sistemas continuos y discretos
- Propiedades básicas de los sistemas
- Suma de convolución
- Integral de convolución
- Propiedades de los sistemas LTI
- CLTIS descritos por ecuaciones en diferencia

Expresiones Generales

Sistemas LTI causales descritos por ecuaciones en diferencias

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k] \tag{3}$$

Solución

$$y[n] = y_h[n] + y_p[n]$$

Solución homogénea

$y_h[n]$ es la solución de la ecuación en diferencias homogénea asociada a 3. Su forma general es la siguiente:

$$y_h[n] = \sum_{m=1}^{N} C_m z_m^n$$

donde z_m son las raices reales distintas de la ecuación característica que se genera al sustituir la forma genérica Z^n. Las constantes C_m se determinan formando un sistema de ecuaciones con $y[n]$ total (natural+particular) usando los valores $y[0], y[1], ...$ calculados de manera recursiva a partir de a partir de las condiciones iniciales $y[-1], y[-2], ...$ para una entrada específica.

Solución Particular

$y_p[n]$ es una señal de la misma forma de la señal de entrada pero generalizada, es decir:

$$y_p[n] = kx[n]$$

donde k se determina sustituyendo la solución anterior en la ecuación en diferencias y resolviendo la ecuación lineal para valores de n consecutivos hasta que k sea un valor estable.

Respuesta impulsiva de Sistemas LTI descrito por ecuaciones en diferencias

La respuesta impulsiva de un sistema LTI descrito por ecuaciones en diferencias se puede calcular de las siguientes formas:

- De manera recursiva.
- Si las condiciones iniciales son cero, entonces la respuesta impulsiva del sistema tiene la forma de la respuesta natural y las constantes C_i se determinan formando un sistema de ecuaciones con $y_h[n]$ (natural) usando los valores $y[0], y[1], \ldots$ calculados de manera recursiva para una entrada impulsiva.
- Calculando la respuesta al escalón unitario y realizando la primera diferencia.

Respuesta impulsiva para sistemas discretos. Conclusiones.

- Un sistema, con condiciones iniciales distintas de cero, no necesariamente es LTI. Si el sistema no es LTI no se debe usar la primera diferencia de la respuesta escalón.
- Al momento de formar el sistema de ecuaciones, requerido para calcular la respuesta impulsiva de forma analítica, NO se toma en cuenta la respuesta particular del sistema para una entrada impulso, esto se debe a que la respuesta particular es instantaneamente transitoria y algebraicamente no es posible determinar el valor de k.

Otro método de solución para sistemas con condiciones iniciales

Respuesta de estado cero(ZSR)

Es la respuesta de un sistema con condiciones iniciales cero.

Respuesta de entrada cero(ZIR)

Es la respuesta natural de un sistema calculando las constantes a traves de un sistema de ecuaciones formado con $y_h[n]$ (natural) usando los valores $y[0], y[1], \ldots$ calculados de manera recursiva a partir de las condiciones iniciales $y[-1], y[-2], \ldots$ sin tomar en cuenta la entrada.

Respuesta total

La respuesta al sistema es la suma de las dos respuestas anteriores ZSR+ZIR. Si el sistema está relajado la solución del sistema es solo la ZSR.

Referencias

A.V. Oppenheim, A.S. Willsky, and S.H. Nawab.
Signals and Systems.
Prentice-Hall signal processing series. Prentice Hall, 1997.

Signals and systems spring 2011 mit opencourseware.
`https://ocw.mit.edu`.
Accessed: 2018-03-10.