



UNIVERSIDAD DE CARABOBO
FACULTAD DE INGENIERÍA
ESCUELA DE INGENIERÍA CIVIL
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA ESTRUCTURAL
INTRODUCCIÓN AL ANÁLISIS ESTRUCTURAL

MÉTODO DE LAS FUERZAS.

APUNTES DE CLASE Y EJERCICIOS RESUELTOS.

Elaborado por:
Ing. MALAVÉ CARIELLO, Jorge A.
Ing. OJEDA MELÉNDEZ, Ana G

UNIVERSIDAD DE CARABOBO
FACULTAD DE INGENIERÍA
ESCUELA DE INGENIERÍA CIVIL
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA ESTRUCTURAL
INTRODUCCIÓN AL ANÁLISIS ESTRUCTURAL

MÉTODO DE LAS FUERZAS.

APUNTES DE CLASE Y EJERCICIOS RESUELTOS.

Elaborado por:

Ing. MALAVÉ CARIELLO, Jorge A

Ing. OJEDA MELÉNDEZ, Ana G

Revisado por:

Prof. QUINTANA AROCHA, José A.

Prof. BONDARENKO HERNÁNDEZ, Slawko B.

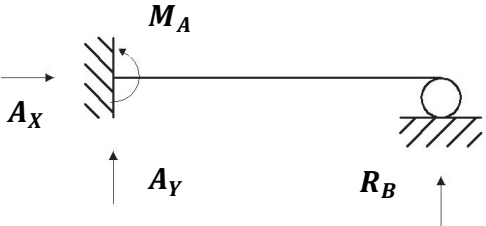
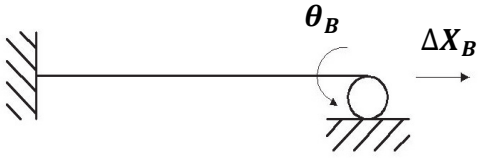
2017.

CONTENIDO

	Pag.
TEORÍAS DE ANÁLISIS ESTRUCTURAL.....	1
INTRODUCCIÓN.....	2
FORMULACIÓN DEL MÉTODO.....	4
I. Clasificación estática.....	4
II. Principio de superposición: Problema Primario y Problema Complementario.....	5
III. Definición de flexibilidad.....	7
IV. Matriz de flexibilidad.....	9
V. Propiedades de la matriz de flexibilidad.....	10
VI. Ecuaciones de compatibilidad.....	13
VII. Procedimiento general de solución.....	14
VIII. Efecto de asentamientos.....	14
IX. Efectos de un gradiente térmico.....	16

	Pag.
EJERCICIOS RESUELTOS.....	18
REFERENCIAS.....	71

TEORIAS DE ANÁLISIS ESTRUCTURAL.

FLEXIBILIDAD [F]	RIGIDEZ[K]
Incógnitas: Fuerzas y momentos redundantes. 	Incógnitas: Grados de libertad (Desplazamientos y Rotaciones). 
Se basa en la flexibilidad del sistema estructural. Se determinan directamente los valores de fuerzas y momentos con los que se construyen los diagramas de solicitaciones. Métodos asociados: ✓ Método de las Fuerzas o de las Deformaciones Coherentes.	Analiza la capacidad de desplazamiento de nodos y deformación de miembros, basado en la rigidez del sistema. Conocidos todos los desplazamientos se pueden correlacionar para determinar las solicitaciones. Métodos asociados: ✓ Formulación Matricial del Método de los Desplazamientos. ✓ Método de las Pendientes Deflexiones o de las Rotaciones. ✓ Método de la Distribución de Momentos o de Cross.

INTRODUCCIÓN.

Las estructuras estáticamente indeterminadas contienen más fuerzas incógnitas que ecuaciones de equilibrio estático disponibles para obtener su solución, entendiéndose como solución el conocer las solicitaciones, desplazamiento de nodos y deformaciones de sus miembros; en resumen conocer la respuesta estructural ante determinadas acciones. Por esta razón, estas estructuras no pueden analizarse utilizando solo las ecuaciones de equilibrio estático, se requieren de ecuaciones adicionales.

Las fuerzas no necesarias para mantener a una estructura en equilibrio y estable son las fuerzas *redundantes*. Dichas fuerzas redundantes pueden ser tanto fuerzas de reacción como solicitaciones de miembros que forman parte de la estructura.

El *método de las fuerzas* también conocido como el *método de las deformaciones coherentes* o *método de las deformaciones compatibles* es un método basado en la teoría de la flexibilidad que se emplea para el análisis de estructuras estáticamente indeterminadas. Presentado por James Maxwell en 1864 y ampliado diez años más tarde por Otto Mohr, comprende, en esencia, la eliminación de suficientes fuerzas hiperestáticas para volverla estáticamente determinada. Esta estructura determinada deberá ser además estáticamente estable y se le denomina estructura primaria.

Entonces se aplican las fuerzas redundantes como cargas desconocidas sobre la estructura primaria y en base a ello se formulan ecuaciones de condición que implican que las deformaciones de esa estructura primaria, debido al efecto combinado de las fuerzas redundantes y las acciones

externas dadas, deben ser iguales a los desplazamientos y/o las deformaciones de la estructura indeterminada original. Se escriben tantas ecuaciones como redundantes existan, y los valores de dichas redundantes se determinan al resolver el sistema de ecuaciones de compatibilidad.

Puesto que las variables independientes o incógnitas en el método de las deformaciones coherentes son las fuerzas (o momentos) redundantes, las cuales deben determinarse antes de que puedan evaluarse las otras características del sistema (por ejemplo, los desplazamientos nodales), el método se clasifica como un método de fuerzas.

Es importante destacar que para que todo lo supuesto anteriormente tenga validez es necesario que los elementos estudiados se encuentren dentro del rango elástico, es decir, que exista proporcionalidad entre los esfuerzos y las deformaciones cumpliéndose la ley de Hooke y pudiéndose aplicar el principio de superposición.

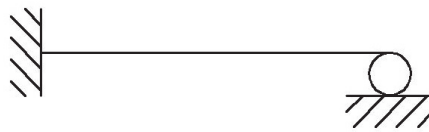
FORMULACIÓN DEL MÉTODO.

I. Clasificación estática.

Se refiere al orden o grado de estabilidad o inestabilidad estática que posea determinado cuerpo en el plano o el espacio. Está relacionada con el grado de hiperestaticidad de la estructura estudiada, el cual es el número de reacciones redundantes presentes. Se calcula por medio de la ecuación:

$$G.H. = \# \text{ Reacciones} - \# \text{ Ecuaciones de Equilibrio Estático} = - G.L.$$

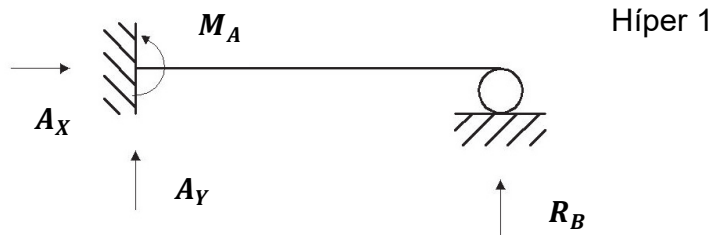
Ejemplo:



$G.H. = (3+1) - 3(1) = 1 \rightarrow$ Es una estructura Híper 1 (Posee una reacción redundante)

Un aspecto importante para la ejecución del método es definir quiénes serán las reacciones redundantes, ya que, la estructura primaria tiene que ser estáticamente estable al igual que lo es la estructura real.

Ejemplo:



En este ejemplo A_X no puede elegirse como la reacción redundante en vista de que quitarla originaría un sistema estáticamente inestable con un grado de libertad (el desplazamiento en la dirección del eje "X"), sin embargo, existen tres opciones para escoger como fuerza redundante, es decir, esta puede ser M_A , A_Y , o R_B ; la elección de una u otra reacción como redundante dependerá en gran medida de en cuanto se facilite el cálculo de la estructura primaria resultante.

II. Principio de superposición: Problema Primario y Problema Complementario.

El principio de superposición es la herramienta de solución en la que se fundamentan la mayoría de los métodos de análisis estructural, permite descomponer un problema lineal en dos o más subproblemas más sencillos, de tal manera que el problema original se obtiene como "superposición" o "suma" de estos subproblemas sencillos.

En el caso del análisis estructural, el principio de superposición permite mediante el análisis de varios sistemas isostáticos (Estructuras primarias) obtener la respuesta real de un sistema hiperestático como lo muestra la siguiente ecuación:

$$\textit{Resp Real} = \textit{Resp Prob Primario} + \textit{Resp Prob complementario}$$

Específicamente para el método de las fuerzas, la expresión anterior adoptaría la siguiente forma:

$$\Delta_{Real} = \Delta_{Primario} + \Delta_{Complementario}$$

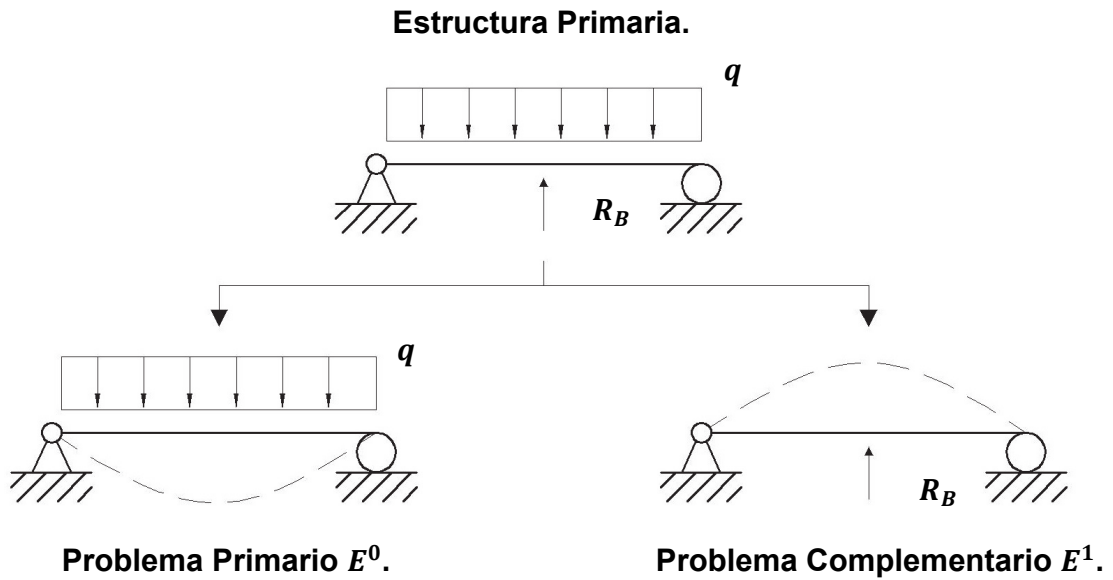
Problema Primario:

El problema primario o E^0 será la estructura primaria previamente definida con todas las acciones externas conocidas aplicadas a la estructura real; tales como cargas puntuales (o momentos), cargas distribuidas, asentamientos, variaciones de temperatura, errores de fabricación, etc. Estudia todos los efectos que pueden ser conocidos sobre la estructura, es decir, no involucra las redundantes incógnitas.

Problema Complementario:

El problema complementario o E^i será la estructura primaria previamente definida solo con las incógnitas del método (o redundantes).

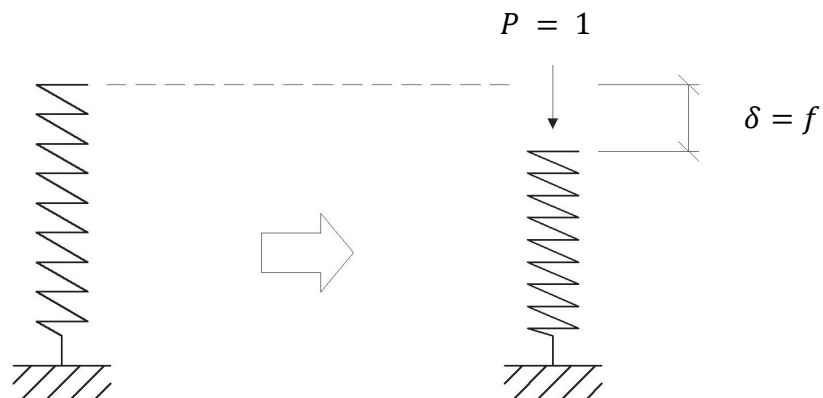
Cabe destacar que el número de problemas complementarios dependerá del grado de hiperestaticidad de la estructura real, es decir, si por ejemplo la estructura real es Híper 4 existirán cuatro problemas complementarios cada uno con una sola de las redundantes.



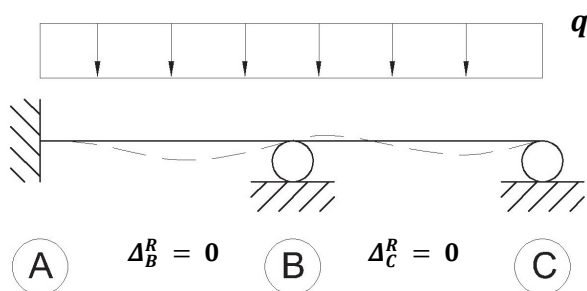
III. Definición de flexibilidad.

La flexibilidad es la deformación (giro o desplazamiento) causado por la acción de una carga unitaria (o momento unitario) aplicada. De allí se concluye que la flexibilidad es el inverso de la rigidez:

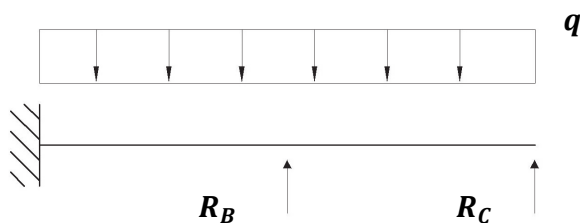
$$[F] = [K]^{-1}$$



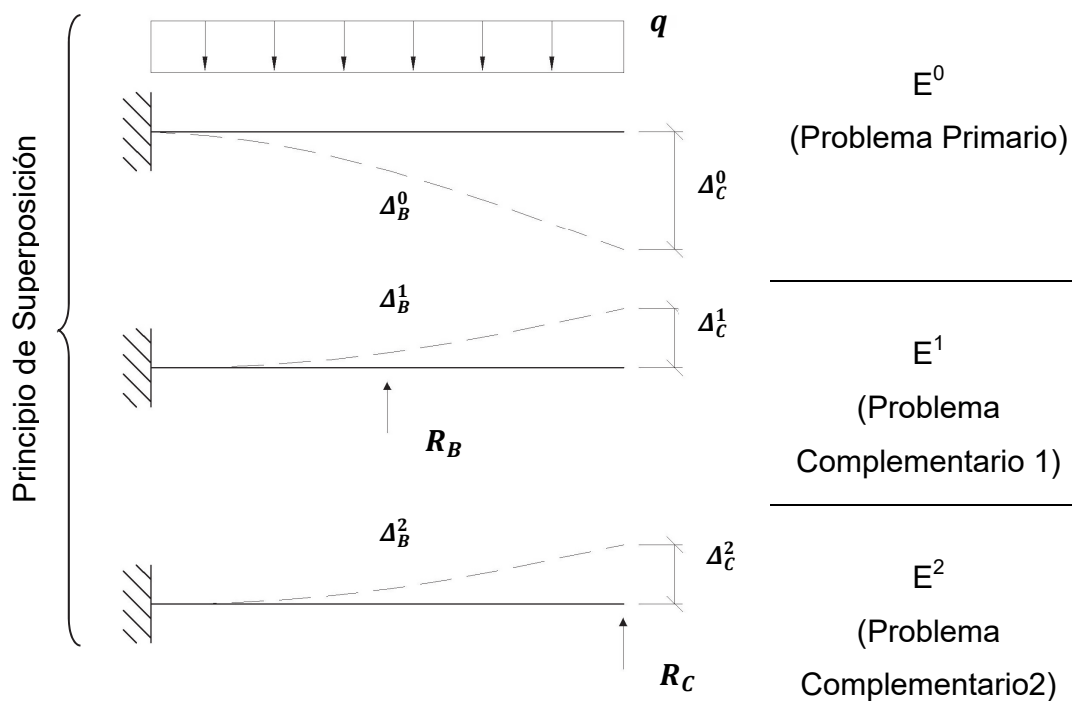
Ejemplo del Método de las Fuerzas:



Estructura Real.



Estructura Primaria.



$$\Delta_B^R = \Delta_B^0 + \Delta_B^1 + \Delta_B^2 = 0$$

$$\Delta_C^R = \Delta_C^0 + \Delta_C^1 + \Delta_C^2 = 0$$

Ecuaciones de Compatibilidad de Deformaciones.

Los desplazamientos Δ_B^0 , Δ_C^0 , Δ_B^1 , Δ_C^1 , Δ_B^2 y Δ_C^2 pueden calcularse por medio del principio del trabajo virtual para cuerpos elásticos.

Los Δ_i^0 siempre podrán calcularse sin problemas a través de este principio, pero los Δ_i^j solo pueden calcularse por medio del coeficiente de flexibilidad como sigue:

$$\Delta_i^j = f_i^j \times P_i$$

Por lo que:

$$\Delta_B^R = \Delta_B^0 + f_B^1 \times R_B + f_B^2 \times R_C$$

$$\Delta_C^R = \Delta_C^0 + f_C^1 \times R_B + f_C^2 \times R_C$$

Escrito en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} \Delta_B^R \\ \Delta_C^R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta_B^0 \\ \Delta_C^0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_B^1 & f_B^2 \\ f_C^1 & f_C^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_B \\ R_C \end{pmatrix}$$

IV. Matriz de flexibilidad.

Es una matriz (Arreglo numérico en filas y columnas) formada por todos los coeficientes de flexibilidad generados en la estructura producto de

las cargas o momentos unitarios redundantes. Su tamaño dependerá del número de reacciones redundantes que exista, es decir, si el sistema es de clasificación estática Híper n , entonces se generará una matriz de flexibilidad de n filas por n columnas.

$$f_{n \times n} = \begin{pmatrix} f_{11} & \cdots & f_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n1} & \cdots & f_{nn} \end{pmatrix}$$

V. Propiedades de la matriz de flexibilidad.

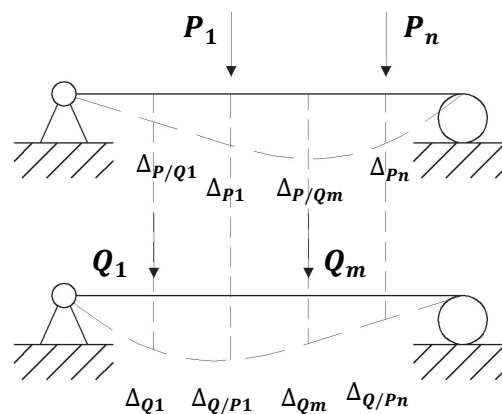
- a) **Es una matriz cuadrada:** El grado de hiperestaticidad " n " nos indica que hacen falta " n " ecuaciones adicionales (" n " filas) que relacionen las fuerzas redundantes para poder hallar sus valores. Como cada una de las ecuaciones de compatibilidad contendrá las " n " redundantes multiplicadas por sus respectivos coeficientes de flexibilidad (" n " columnas) se demuestra que f es una matriz cuadrada.
- b) **Es una matriz invertible:** Para que una matriz A sea invertible, aparte de ser cuadrada ($n \times n$), debe ser una matriz no-singular. Es decir, el valor de su determinante debe ser diferente de cero. Puede ser definida como:

$$A A^{-1} = A^{-1} A = I$$

Siendo A^{-1} la matriz inversa de A e I la matriz identidad de orden $n \times n$.

Si la “matriz de flexibilidad” estudiada resultase ser singular, quiere decir las fuerzas escogidas no son realmente redundantes (generando la estructura primaria es inestable), y por ende dicha matriz realmente no es una matriz de flexibilidad.

- c) **La diagonal principal es positiva:** Debido a que en estos puntos la carga unitaria redundante aplicada va en el mismo sentido que el desplazamiento, la relación ($\Delta = \mathbf{f} \times \mathbf{R}$) > 0 , y como R siempre se asume positivo da lugar valores $\mathbf{f} > 0$ en la diagonal principal de la matriz de flexibilidad.
- d) **Cumple la Ley Betti:** Presentada por E. Betti en 1872 enuncia lo siguiente: “Para una estructura linealmente elástica, el trabajo virtual realizado por sistema $\mathbf{P}$ de fuerzas y pares actuando a través de la deformación causada por otro sistema $\mathbf{Q}$ de fuerzas y pares, es igual al trabajo virtual del sistema de fuerzas $\mathbf{Q}$ actuando a sobre de la deformación debida al sistema $\mathbf{P}$.”

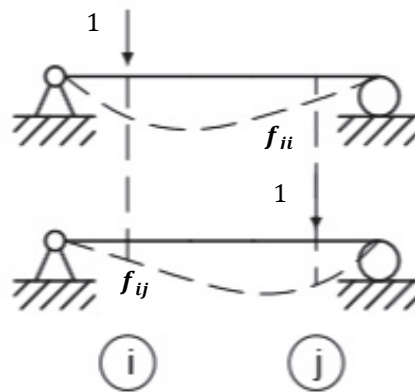


$$W_{V1} = P_1 \Delta_{Q/P1} + \dots + P_n \Delta_{Q/Pn}$$

$$W_{V2} = Q_1 \Delta_{P/Q_1} + \dots + Q_n \Delta_{P/Q_n}$$

$$W_{V1} = W_{V2}$$

- e) **Cumple la Ley de Maxwell:** La Ley de Maxwell es un caso particular de Ley de Betti y que establece lo siguiente: debido a que el desplazamiento en un punto i debido a una carga unitaria alicada en otro punto j de un sistema es igual al desplazamiento del punto j del sistema debido a la aplicación de una carga unitaria en el punto i del mismo, los coeficientes de flexibilidad f_{ij} son iguales a los f_{ji} , por lo que la matriz de flexibilidad es igual a su traspuesta, en otras palabras, es una matriz simétrica.



Aplicando la ley de Betti:

$$f_{ij} \times 1 = f_{ji} \times 1$$

$$f_{ij} = f_{ji}$$

Esta propiedad facilita mucho el análisis de las estructuras, ya que no será necesario efectuar “ $n(n + 1)$ ” trabajos virtuales para

conocer todas las constantes de la ecuación de compatibilidad de deformaciones que dependen de la matriz de flexibilidad, bastara con determinar los términos de la matriz del problema primario, en la matriz de flexibilidad los de la diagonal principal y los que estén por encima de esta para resolver el sistema de ecuaciones.

VI. Ecuaciones de compatibilidad.

Las ecuaciones de compatibilidad serán las obtenidas de las relaciones de deformaciones como se planteó anteriormente. La solución del problema primario vendrá de los desplazamientos dados por el cruce mediante trabajo virtual del sistema primario con los sistemas complementarios, y la solución del problema complementario vendrá dada por el cruce mediante trabajo virtual de los sistemas complementarios (en caso de haber más de uno) a través del producto de la matriz de flexibilidad por el vector de cargas incógnita.

$$[\Delta^R] = [\Delta^0] + [f][Q]$$

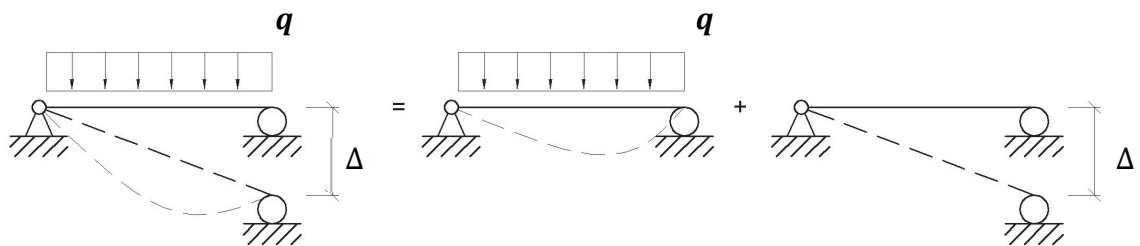
Despejando:

$$[Q] = \{[\Delta^R] - [\Delta^0]\}[f]^{-1} = \{[\Delta^R] - [\Delta^0]\}[K]$$

VII. Procedimiento general de solución.

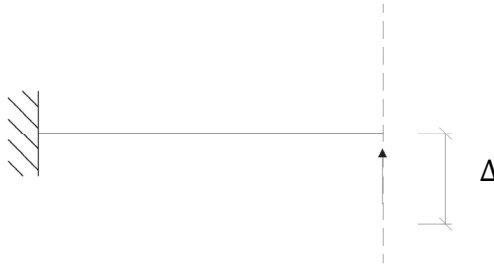
- 1) Determinar la clasificación estática.
- 2) Plantear sistemas (estructuras) primarias potenciales, seleccionar las más conveniente.
- 3) Definir y resolver el problema primario (Calcular solicitaciones).
- 4) Definir y resolver el/los problema(s) complementarios (Calcular solicitaciones).
- 5) Plantear ecuación(es) de compatibilidad.
- 6) Calcular los desplazamientos del problema primario y los coeficientes de flexibilidad utilizando el Principio de Trabajo Virtual para Cuerpos Elásticos.
- 7) Sustituir en las ecuaciones de compatibilidad los términos calculados y resolver.
- 8) Sustituir redundantes en el problema real y calcular reacciones.
- 9) Desarrollar los diagramas de corte y momento flector.

VIII. Efecto de asentamientos.



Existen dos formas de estudio para los asentamientos:

✓ **Cuando la redundante coincide con el asentamiento:**

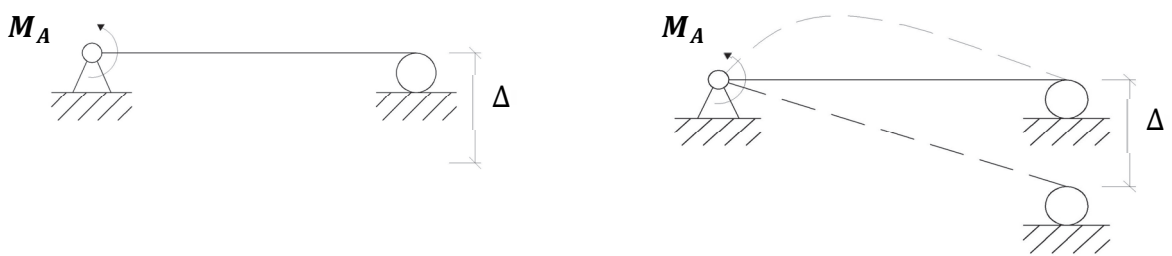


Línea de compatibilidad
de deformaciones

$$\Delta_B^R = \Delta_B^0 + \Delta_B^1$$

Afecta a la matriz de desplazamientos totales, por lo que en este caso $\Delta_B^R = \Delta = \text{Asentamiento}$, es decir, se iguala el asentamiento al desplazamiento total en el punto estudiado.

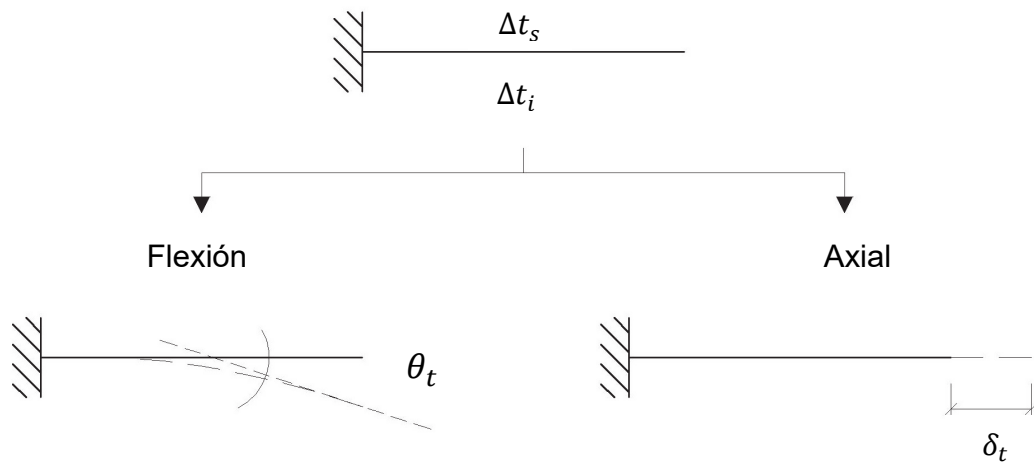
✓ **Cuando la redundante no coincide con el asentamiento:**



$$\theta_A^R = \theta_A^0 + \theta_A^1$$

Afecta el trabajo virtual (Trabajo externo) de E_0

IX. Efectos de un gradiente térmico.



Ecuaciones:

Flexión

$$M_t = \frac{\Delta(\Delta t) \times \alpha_t \times E \times I}{H}$$

Axial

$$N_t = \Delta t_0 \times \alpha_t \times A \times E$$

Donde:

$$\Delta(\Delta t) = \Delta t_i - \Delta t_s$$

$$\Delta t_0 = \frac{\Delta t_i \times H_s + \Delta t_s \times H_i}{H}$$

$$\theta_t = \frac{\Delta(\Delta t) \times \alpha_t \times L}{H}$$

$$\delta_t = \Delta t_0 \times \alpha_t \times L$$

En sistemas hiperestáticos aparecerán reacciones que equilibran a las fuerzas por temperatura. Los efectos de temperatura siempre se evalúan en el trabajo interno de la sumatoria de trabajo virtual del sistema primario.

EJERCICIOS RESUELTOS.

EJERCICIO 1.

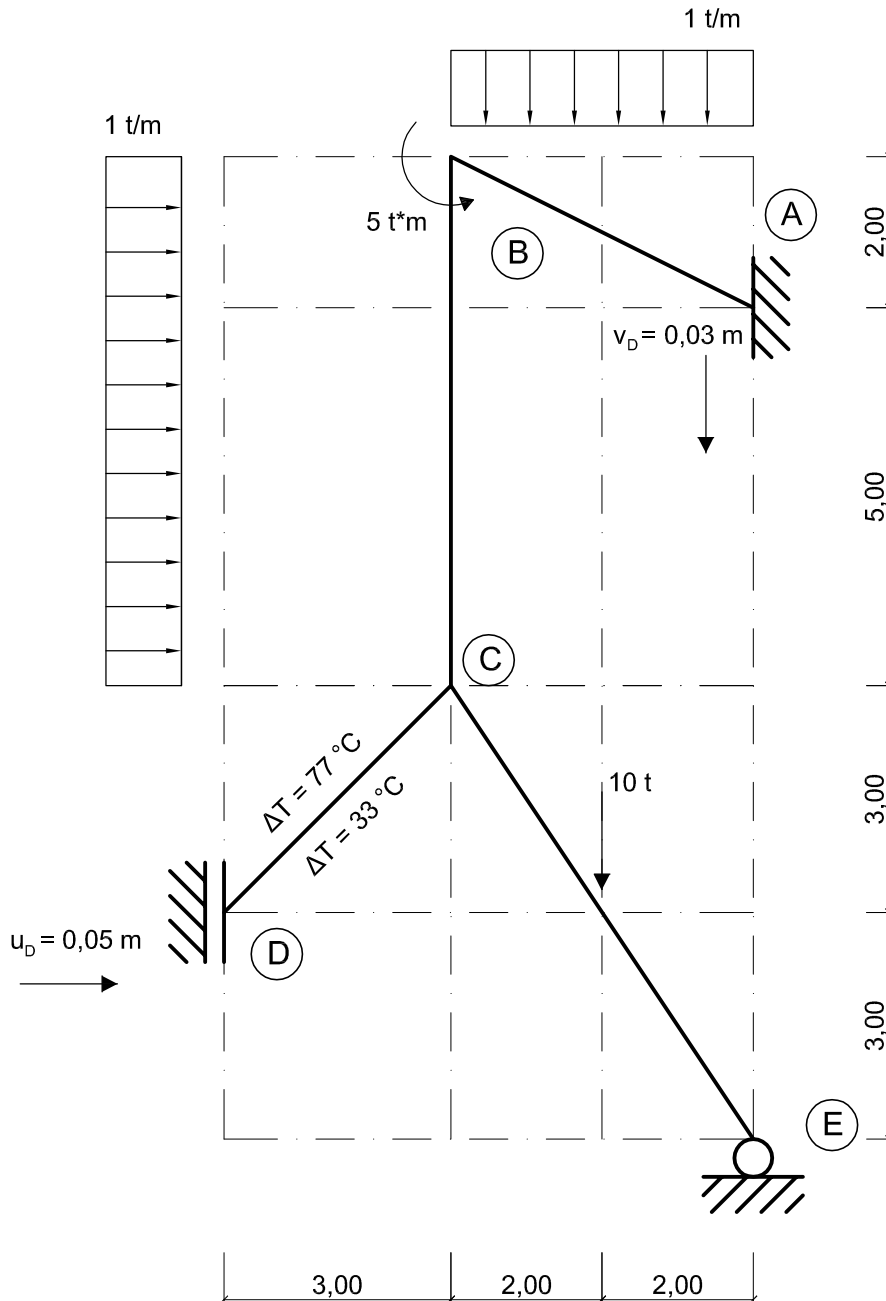
Determinar el diagrama de momento de la siguiente estructura utilizando el Método de las Fuerzas, despreciando los efectos de sollicitaciones axiales y cortantes.

Datos del sistema estructural:

$$E = 2,0 \cdot 10^7 \text{ t/m}^2 \quad h = 0,14 \text{ m}$$

$$I = 870 \text{ cm}^4$$

$$\alpha t = 1 \cdot 10^{-5} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$$



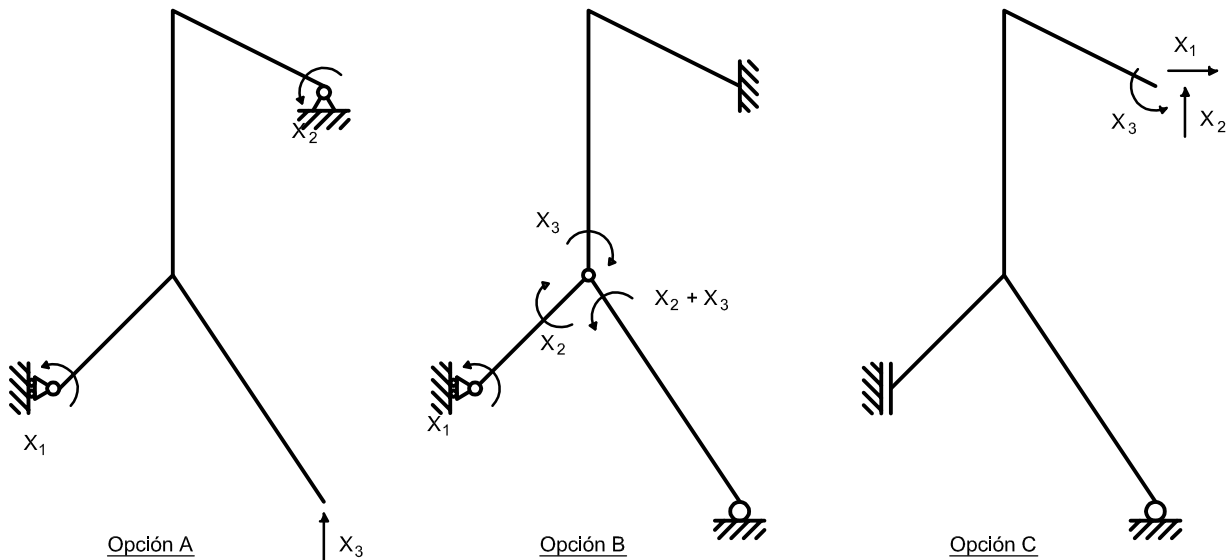
SOLUCIÓN:

1. Clasificación estática de la estructura:

$$GL = 3(1) - 6 = -3 \rightarrow GH = 3$$

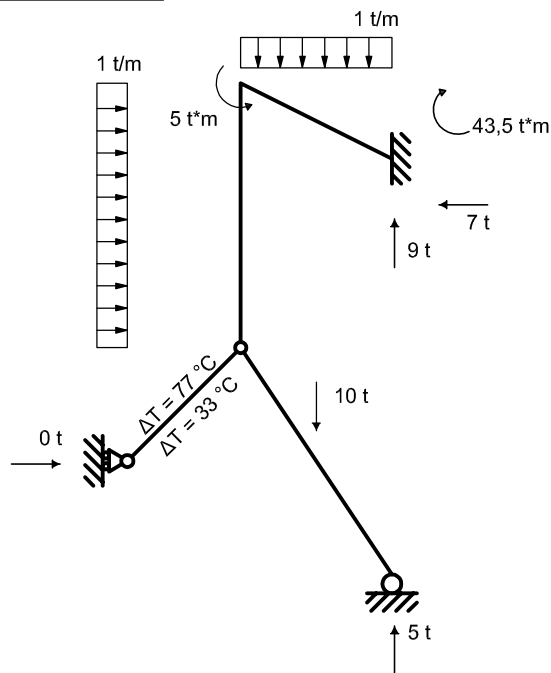
Se recomienda, siempre que sea posible, tomar como redundantes los momentos generados por restricciones de giro, ya que al determinarlos se obtienen directamente los valores extremos del diagrama de momento.

2. Sistemas primarios potenciales: Se presentan 3 posibles grupos de redundantes.



Se selecciona para desarrollar el ejercicio la opción B

3. Sistema primario E^0 :

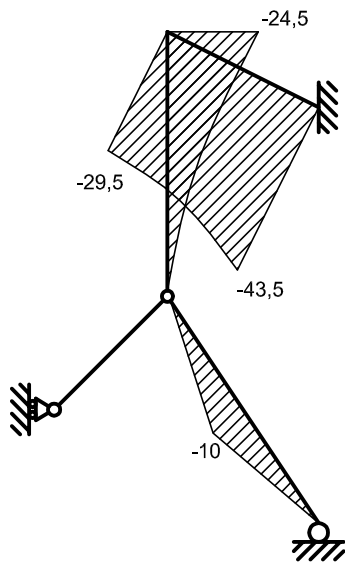


Reacciones:

$$\begin{aligned} \sum M_c (CE) &\rightarrow E = 5 \text{ t} \\ \sum M_c (CD) &\rightarrow D = 0 \text{ t} \\ \sum F_y &\rightarrow A_y = 9 \text{ t} \\ \sum F_x &\rightarrow A_x = -7 \text{ t} \\ \sum M C A &\rightarrow MA = 43,5 \text{ t} \end{aligned}$$

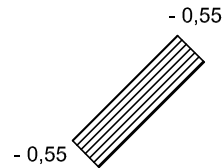
Únicamente para este sistema se obtendrá el diagrama de momento real en los casos de barras con carga distribuida, para el resto de los casos se obtendrán directamente por superposición o con ecuaciones según convenga.

Diagramas de Momento.

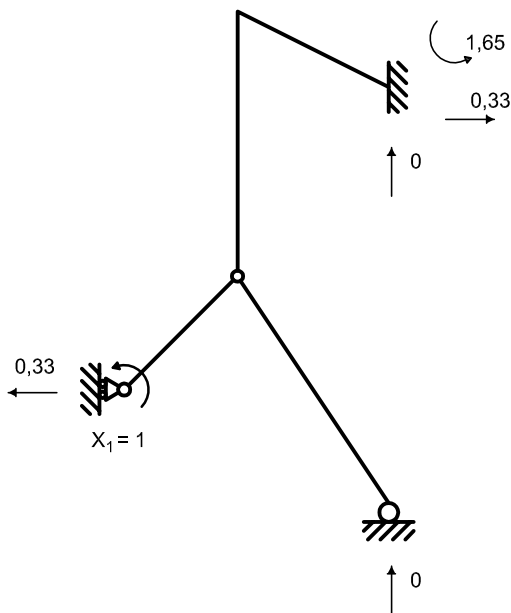


Momento por Temperatura:

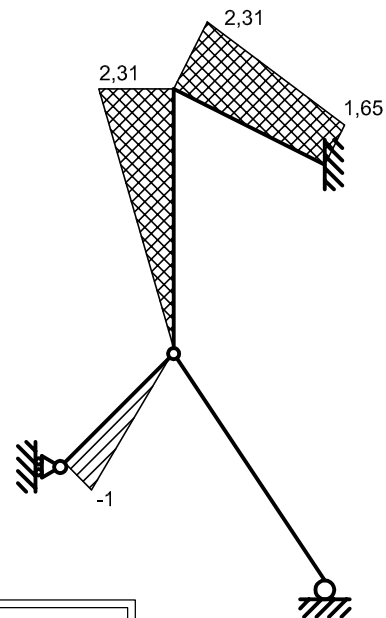
$$M_t = \frac{\Delta(\Delta t) * \alpha t * E I}{h} = \frac{(77-33) * 1 * 10^{-5} * 174}{0,14} = -0,55 \text{ t*m}$$



4. Sistema complementario E¹:

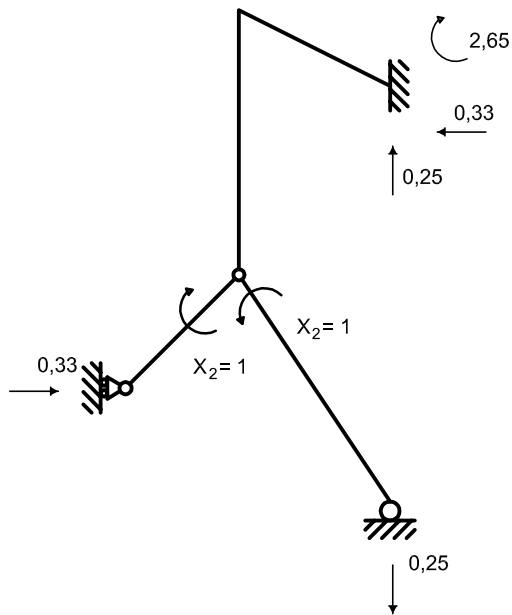


Diagramas de Momento.

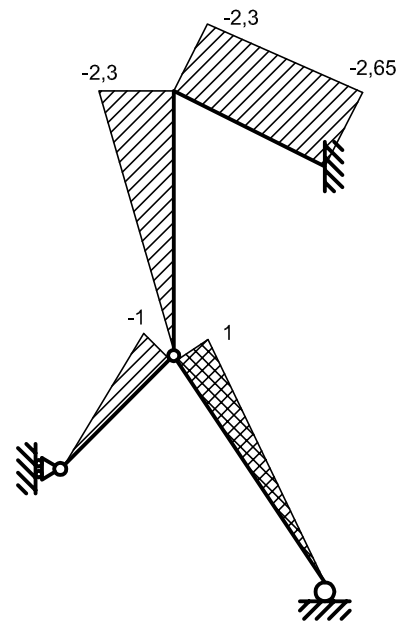


La metodología para el cálculo de las reacciones será la misma tanto para el sistema primario como para los complementarios.

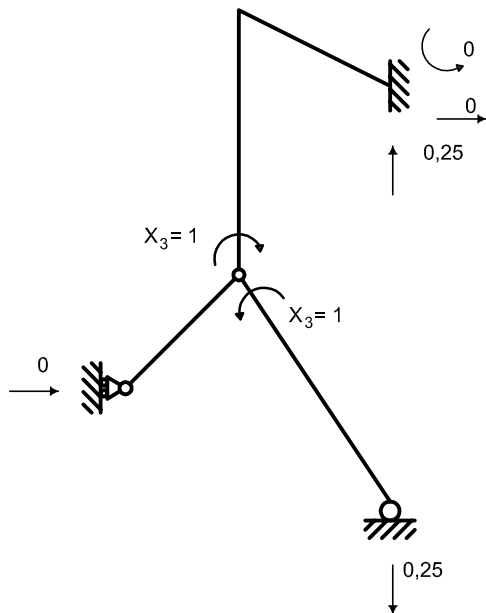
Sistema complementario E²:



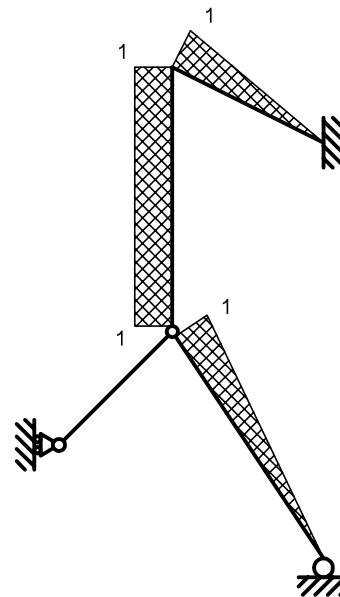
Diagramas de Momento.



Sistema complementario E³:



Diagramas de Momento.



5. Ecuaciones de compatibilidad:

$$\begin{cases} \theta_{1r} = \theta_{10} + F_{11} \cdot X_1 + F_{12} \cdot X_2 + F_{13} \cdot X_3 \\ \theta_{2r} = \theta_{20} + F_{21} \cdot X_1 + F_{22} \cdot X_2 + F_{23} \cdot X_3 \\ \theta_{3r} = \theta_{30} + F_{31} \cdot X_1 + F_{32} \cdot X_2 + F_{33} \cdot X_3 \end{cases}$$

6. Obtención de desplazamientos del problema primario y coeficientes de flexibilidad utilizando PTVCE:

θ_{10} :

$$W_{ext} = \theta_{10} * 1 - (0,05)*(0,33) \rightarrow W_{ext} = \theta_{10} - 0,017$$

En este caso puede utilizarse directamente la integral gráfica porque la parábola tiene vertice. De lo contrario se recomienda hacer superposición.

Por superposición en AB se tiene que:



$$\begin{aligned}
 W_{int} = & \int_0^7 \frac{1}{EI} \left(-24,5x + 2,31x^2 \right) dx + \int_0^{4,47} \frac{1}{EI} \left(2x - 2,31x^2 + 1,65x \right) dx + \int_0^{4,47} \frac{1}{EI} \left(-29,5x - 43,5x^2 + 2,31x^3 + 1,65x^4 \right) dx \\
 & + \int_0^{4,24} \frac{1}{EI} \left(-0,55x - 1x^2 \right) dx = -2,33
 \end{aligned}$$

$W_{ext} = W_{int}$
 $\theta_{10} - 0,017 = -2,33$
 $\theta_{10} = -2,31$

θ_{20} :

$$W_{ext} = \theta_{20} * 1 + (0,05)*(0,33) - (0,03)(0,25) \rightarrow W_{ext} = \theta_{20} + 0,009$$

$$\begin{aligned}
 W_{int} = & \int_0^{7,21} \frac{1}{EI} \left(-10x + 1x^2 \right) dx + \int_0^7 \frac{1}{EI} \left(-24,5x - 2,3x^2 \right) dx + \int_0^{4,47} \frac{1}{EI} \left(2x - 2,3x^2 - 2,65x^3 \right) dx \\
 & + \int_0^{4,47} \frac{1}{EI} \left(-29,5x - 43,5x^2 - 2,3x^3 - 2,65x^4 \right) dx + \int_0^{4,24} \frac{1}{EI} \left(-0,55x - 1x^2 \right) dx = 2,71
 \end{aligned}$$

$W_{ext} = W_{int}$
 $\theta_{20} + 0,009 = 2,71$
 $\theta_{20} = 2,71$

θ_{30} :

$$W_{ext} = \theta_{30} * 1 - (0,03)*(0,25) \rightarrow W_{ext} = \theta_{30} - 0,0075$$

$$\begin{aligned}
 W_{int} = & \int_0^{7,21} \frac{-10}{EI} dx + \int_0^7 \frac{-24,5}{EI} dx + \int_0^{4,47} \frac{2}{EI} dx \\
 & + \int_0^{4,47} \frac{-29,5}{EI} dx + \int_0^{4,47} \frac{-43,5}{EI} dx = -0,84
 \end{aligned}$$

$W_{ext} = W_{int}$
 $\theta_{30} + 0,0075 = -0,84$
 $\theta_{30} = -0,84$

F₁₁:

$$W_{ext} = F_{11} * 1$$

$$\begin{aligned}
 W_{int} = & \int_0^{4,24} \frac{-1}{EI} dx + \int_0^7 \frac{2,31}{EI} dx + \int_0^{4,47} \frac{2,31}{EI} dx \\
 & + \int_0^{4,47} \frac{1,65}{EI} dx + \int_0^{4,47} \frac{1,65}{EI} dx = 0,18
 \end{aligned}$$

$W_{ext} = W_{int}$
 $F_{11} = 0,18$

F₁₂:

$$W_{ext} = F_{12} * 1$$

$$\begin{aligned}
 W_{int} = & \int_0^{4,24} \frac{-1}{EI} dx + \int_0^7 \frac{2,31}{EI} dx + \int_0^{4,47} \frac{2,31}{EI} dx \\
 & + \int_0^{4,47} \frac{1,65}{EI} dx + \int_0^{4,47} \frac{-2,65}{EI} dx = -0,19
 \end{aligned}$$

$W_{ext} = W_{int}$
 $F_{12} = F_{21} = -0,19$

F₁₃:

$$W_{ext} = F_{13} * 1$$

$$W_{int} = \int_0^7 \frac{2,31}{EI} dx + \int_0^{4,47} \frac{2,31}{EI} dx + \int_0^1 \frac{1}{EI} dx = 0,07$$

Wext = Wint

$$F_{13} = F_{31} = 0,07$$

F₂₂:

$$W_{ext} = F_{22} \cdot 1$$

$$W_{int} = \int_0^{7,21} \frac{1}{EI} dx + \int_0^{4,24} \frac{-1}{EI} dx + \int_0^7 \frac{-2,3}{EI} dx + \int_0^{4,47} \frac{-2,3}{EI} dx + \int_0^1 \frac{-2,65}{EI} dx = 0,25$$

Wext = Wint

$$F_{22} = 0,25$$

F₂₃:

$$W_{ext} = F_{23} \cdot 1$$

$$W_{int} = \int_0^{7,21} \frac{1}{EI} dx + \int_0^7 \frac{-2,3}{EI} dx + \int_0^{4,47} \frac{-2,3}{EI} dx + \int_0^1 \frac{1}{EI} dx = -0,06$$

Wext = Wint

$$F_{23} = F_{32} = -0,06$$

F₃₃:

$$W_{ext} = F_{33} \cdot 1$$

$$W_{int} = \int_0^{7,21} \frac{1}{EI} dx + \int_0^7 \frac{1}{EI} dx + \int_0^{4,47} \frac{1}{EI} dx$$

$W_{ext} = W_{int}$

$= 0,06$

$F_{33} = 0,06$

7. Solución de las ecuaciones de compatibilidad:

$$\begin{cases} 0 = -2,31 + 0,18 \cdot X_1 - 0,19 \cdot X_2 + 0,07 \cdot X_3 \\ 0 = 2,71 - 0,19 \cdot X_1 + 0,25 \cdot X_2 - 0,06 \cdot X_3 \\ 0 = -0,84 + 0,07 \cdot X_1 - 0,06 \cdot X_2 + 0,06 \cdot X_3 \end{cases}$$

$X_1 = 6,89 \text{ t}\cdot\text{m} \quad X_2 = -5,44 \text{ t}\cdot\text{m} \quad X_3 = 0,53 \text{ t}\cdot\text{m}$

Matriz de flexibilidad:

$$F = \begin{bmatrix} 0,18 & -0,19 & 0,07 \\ -0,19 & 0,25 & -0,06 \\ 0,07 & -0,06 & 0,06 \end{bmatrix}$$

Una vez obtenidos los valores de las redundantes, estos se sustituyen en la estructura para luego determinar el diagrama de momento real.

8. Sustitución de redundantes y cálculo de reacciones:

Reacciones:

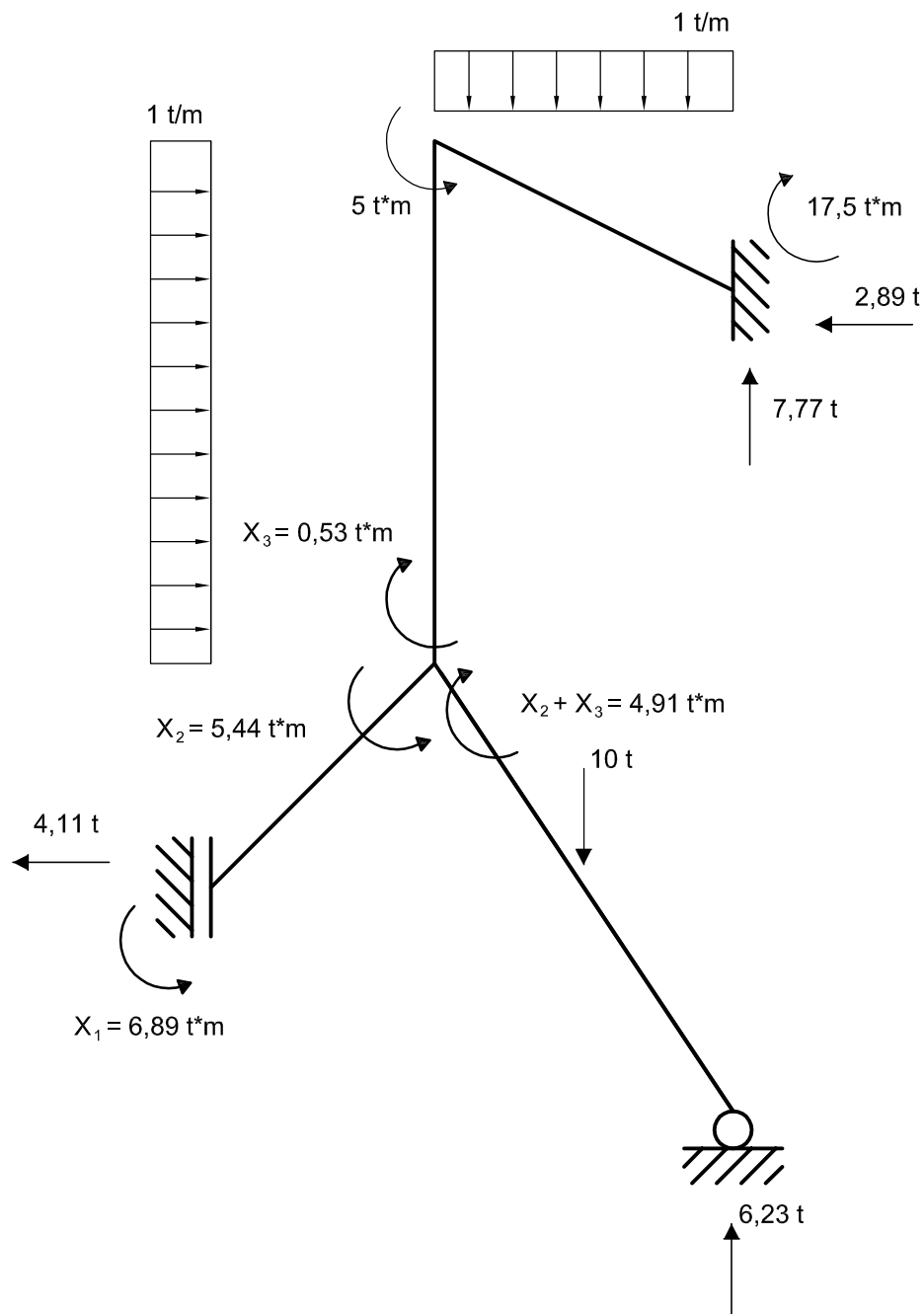
$$\sum M_c (CE) \rightarrow E = 6,23 \text{ t}$$

$$\sum M_c (CD) \rightarrow D = -4,11 \text{ t}$$

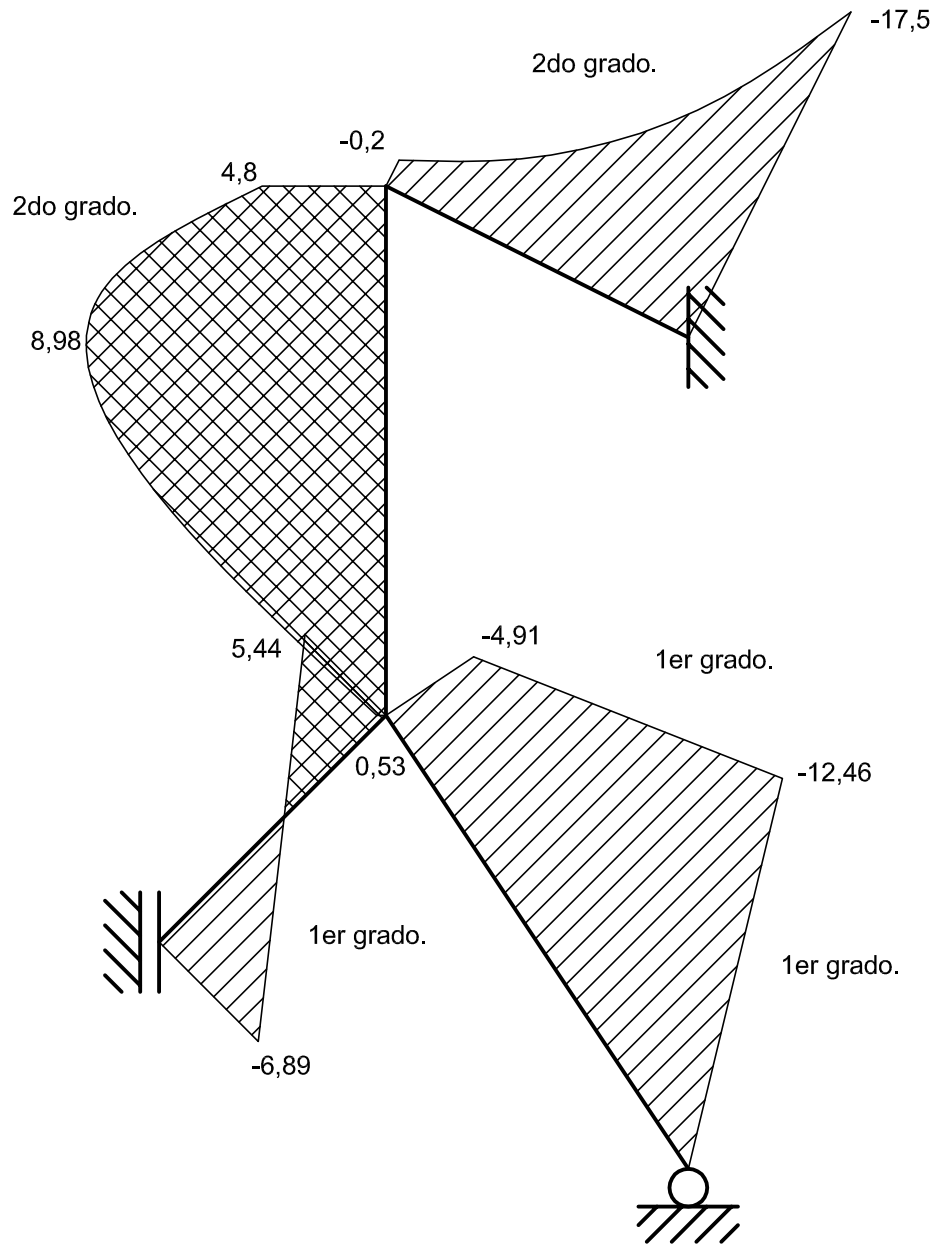
$$\sum F_y \rightarrow A_y = 7,77 \text{ t}$$

$$\sum F_x \rightarrow A_x = -2,89 \text{ t}$$

$$\sum M C A \rightarrow M_A = -17,5 \text{ t}$$



9. Diagrama de momento real:



EJERCICIO 2.

Determinar el diagrama de momento de la siguiente estructura utilizando el Método de las Fuerzas, despreciando los efectos de solocitaciones axiales y cortantes.

Datos del sistema estructural:

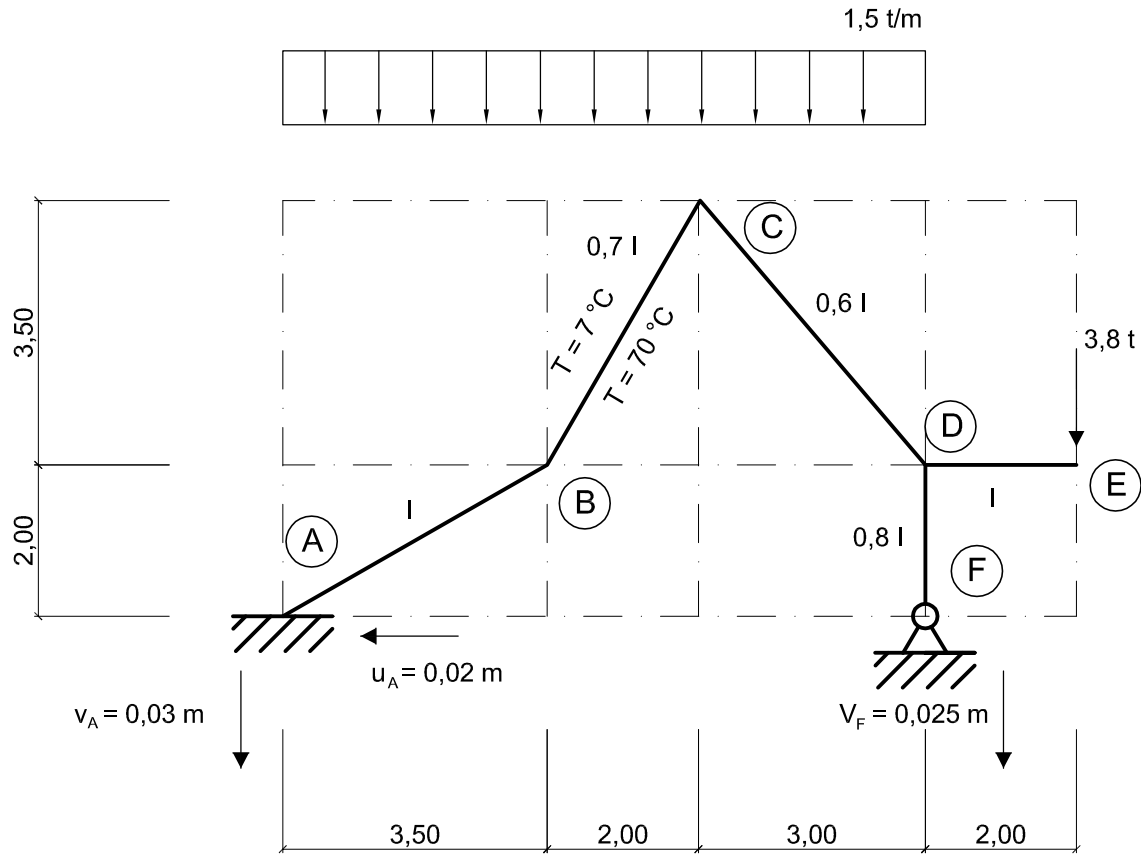
$$E = 2,1 \cdot 10^6 \text{ t/m}^2$$

$$h = 0,58 \text{ m}$$

$$I = 0,0067 \text{ m}^4$$

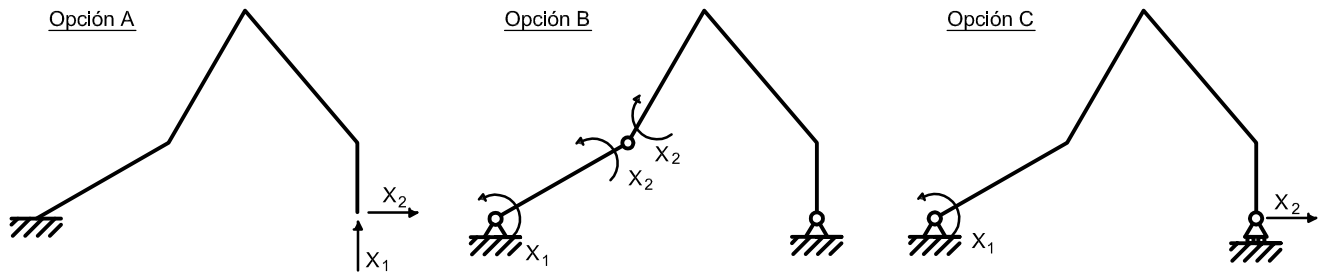
$$tr = 6 \text{ } ^\circ\text{C}$$

$$\alpha t = 1,1 \cdot 10^{-5} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$$

**SOLUCIÓN:****1. Clasificación estática de la estructura:**

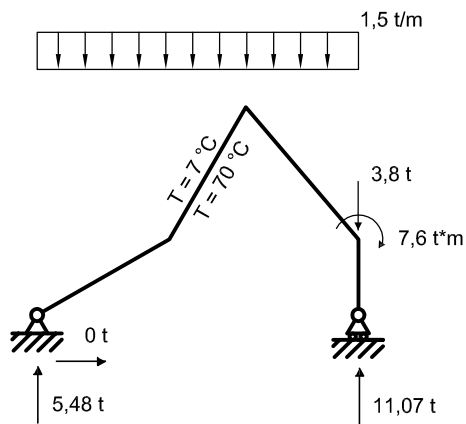
$$GL = 3(1) - 5 = -2 \rightarrow GH = 2$$

2. **Sistemas primarios potenciales:** Se presentan 3 posibles grupos de redundantes.



Se selecciona para desarrollar el ejercicio la opción C

3. **Sistema primario E⁰:**



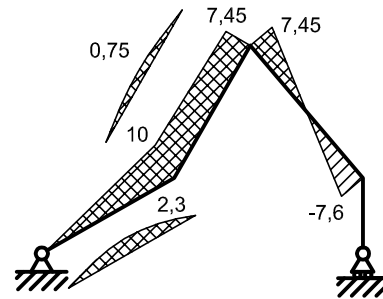
Reacciones:

$$\sum M_A \rightarrow F = 11,07 \text{ t}$$

$$\sum F_y \rightarrow A_y = 5,48 \text{ t}$$

$$\sum F_x \rightarrow A_x = 0 \text{ t}$$

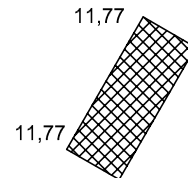
Diagramas de Momento.



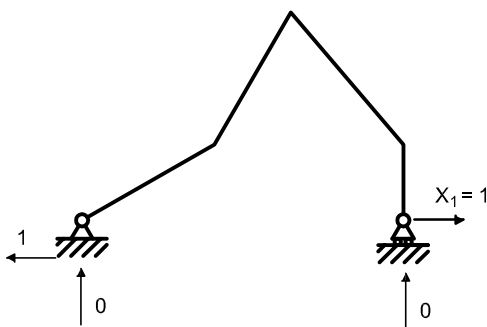
Momento por Temperatura:

$$M_t = \frac{\Delta(\Delta t) \cdot \alpha t \cdot E I}{h} = \frac{(64-1) \cdot 1,1 \cdot 10^{-5} \cdot (0,7 \cdot 14070)}{0,58}$$

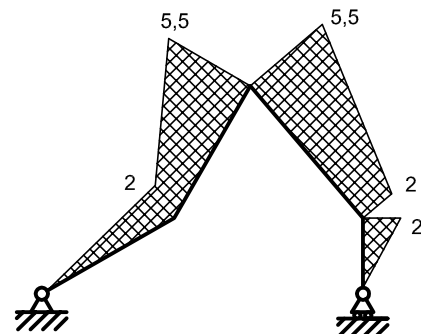
$$M_t = 11,77 \text{ t*m}$$

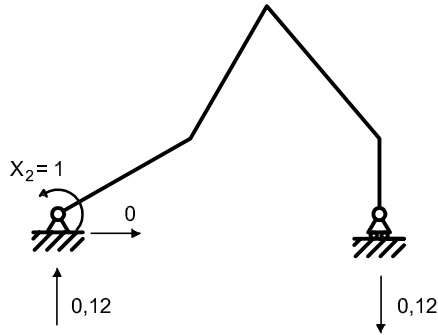


4. **Sistema complementario E¹:**

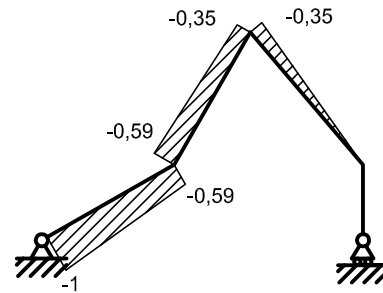


Diagramas de Momento.



Sistema complementario E^2 :

Diagramas de Momento.

**5. Ecuaciones de compatibilidad:**

$$\begin{cases} u_{1r} = u_{10} + F_{11} \cdot X_1 + F_{12} \cdot X_2 \\ \theta_{2r} = \theta_{20} + F_{21} \cdot X_1 + F_{22} \cdot X_2 \end{cases}$$

6. Obtención de desplazamientos del problema primario y coeficientes de flexibilidad utilizando PTVCE: u_{10} :

$$W_{ext} = u_{10} \cdot 1 + (1) \cdot (0,02) \rightarrow W_{ext} = u_{10} + 0,02$$

$$\begin{aligned} W_{int} = & \int_0^{4,03} \frac{10x}{EI} dx + \int_0^{4,03} \frac{2x}{EI} dx + \int_0^{4,03} \frac{2,3x}{EI} dx + \int_0^{4,03} \frac{2x}{EI} dx + \int_0^{4,03} \frac{10x}{0,7EI} dx + \int_0^{4,03} \frac{7,45x}{0,7EI} dx + \int_0^{4,03} \frac{2x}{0,7EI} dx + \int_0^{4,03} \frac{5,5x}{0,7EI} dx \\ & + \int_0^{4,03} \frac{0,75x}{0,7EI} dx + \int_0^{4,03} \frac{2x}{0,7EI} dx + \int_0^{4,61} \frac{7,45x}{0,6EI} dx + \int_0^{4,61} \frac{5,5x}{0,6EI} dx + \int_0^{4,61} \frac{2x}{0,6EI} dx + \int_0^{4,61} \frac{1,69x}{0,6EI} dx + \int_0^{4,61} \frac{5,5x}{0,6EI} dx \\ & + \int_0^{4,03} \frac{11,77x}{0,7EI} dx + \int_0^{4,03} \frac{2x}{0,7EI} dx = 0,041 \end{aligned}$$

$$W_{ext} = W_{int}$$

$$u_{10} + 0,02 = 0,041$$

$u_{10} = 0,021$

θ_{20} :

$$W_{ext} = \theta_{20} * 1 - (0,12) * (0,03) + (0,12)(0,025) \rightarrow W_{ext} = \theta_{20} - 0,0006$$

$$\begin{aligned}
 W_{int} = & \int_0^{4,03} \frac{10}{EI} dx + \int_0^{4,03} \frac{2,3}{EI} dx + \int_0^{4,03} \frac{10}{0,7EI} dx \\
 & + \int_0^{4,03} \frac{0,75}{0,7EI} dx + \int_0^{4,61} \frac{7,45}{0,6EI} dx + \int_0^{4,61} \frac{1,69}{0,6EI} dx \\
 & + \int_0^{4,03} \frac{11,77}{0,7EI} dx = -0,006
 \end{aligned}$$

$W_{ext} = W_{int}$
 $\theta_{20} - 0,0006 = -0,006$
 $\theta_{20} = -0,0054$

F_{11} :

$$W_{ext} = F_{11} * 1$$

$$\begin{aligned}
 W_{int} = & \int_0^{4,03} \frac{2}{EI} dx + \int_0^{4,03} \frac{2}{0,7EI} dx + \int_0^{4,61} \frac{5,5}{0,6EI} dx \\
 & + \int_0^2 \frac{2}{0,8EI} dx = 0,015
 \end{aligned}$$

$W_{ext} = W_{int}$
 $F_{11} = 0,015$
 $F_{11} = 0,015$

F_{22} :

$$W_{ext} = F_{22} * 1$$

$$W_{int} = \int_0^{4,03} \frac{1}{EI} (-1 - 0,59x) dx + \int_0^{4,03} \frac{1}{0,7EI} (-0,59 - 0,35x) dx + \int_0^{4,61} \frac{1}{0,6EI} (-0,35 - 0,35x) dx$$

$$W_{ext} = W_{int}$$

$$= 0,0003$$

$$F_{22} = 0,0003$$

$F_{22} = 0,0003$

F_{12} :

$$W_{ext} = F_{12} \cdot 1$$

$$W_{int} = \int_0^{4,03} \frac{1}{EI} (2x - 1 - 0,59x) dx + \int_0^{4,03} \frac{1}{0,7EI} (2x - 0,59 - 0,35x) dx + \int_0^{4,61} \frac{1}{0,6EI} (5,5x - 0,35 - 0,35x) dx$$

$$W_{ext} = W_{int}$$

$$= -0,0013$$

$$F_{12} = -0,0013$$

$F_{12} = F_{21} = -0,0013$

7. Solución de las ecuaciones de compatibilidad:

$$\begin{cases} 0 = 0,021 + 0,015X_1 - 0,0013X_2 \\ 0 = -0,0054 - 0,0013X_1 + 0,0003X_2 \end{cases}$$

$X_1 = 0,26 \text{ t}\cdot\text{m} \quad X_2 = 19,11 \text{ t}\cdot\text{m}$

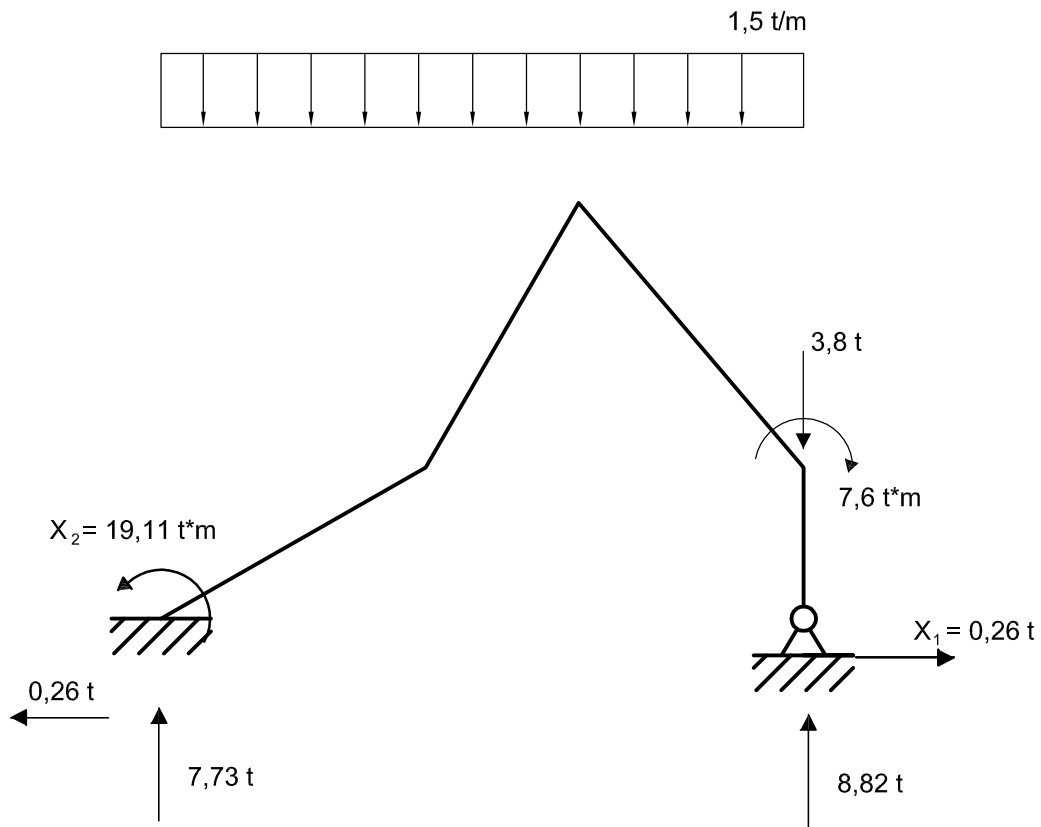
Matriz de flexibilidad:

$$F = \begin{bmatrix} 0,015 & -0,0013 \\ -0,0013 & 0,0003 \end{bmatrix}$$

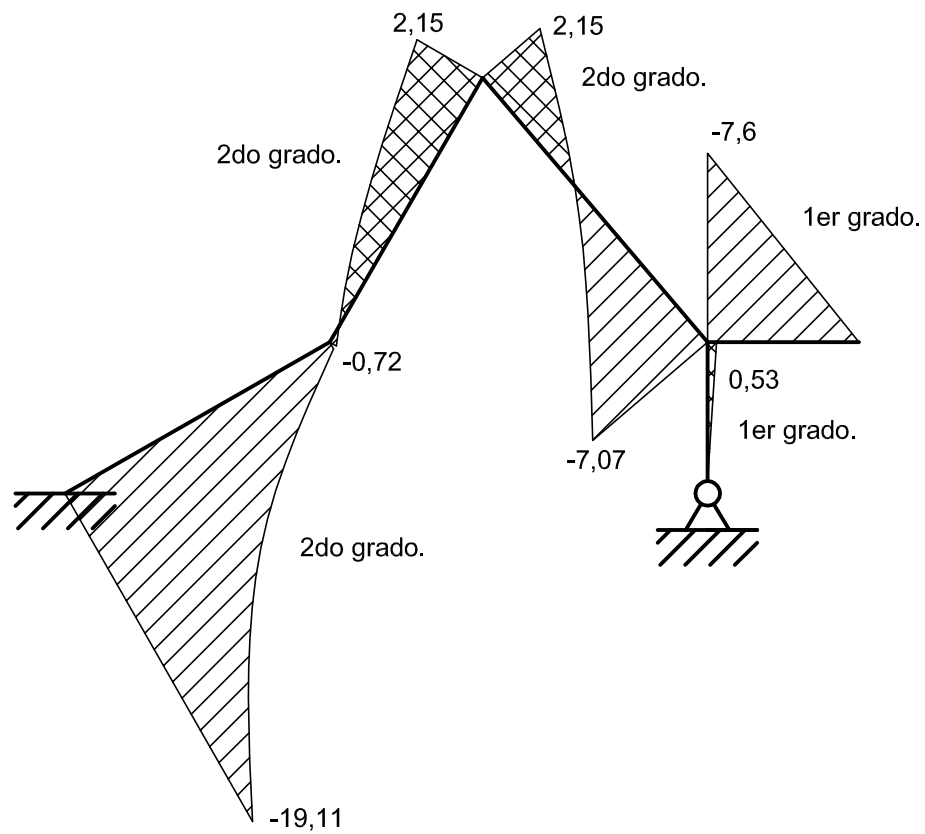
8. Sustitución de redundantes y cálculo de reacciones:

Reacciones:

$$\begin{aligned} \sum M_A &\rightarrow F = 8,82 \text{ t} \\ \sum F_y &\rightarrow A_y = 7,73 \text{ t} \\ \sum F_x &\rightarrow A_x = -0,26 \text{ t} \end{aligned}$$



9. Diagrama de momento real:



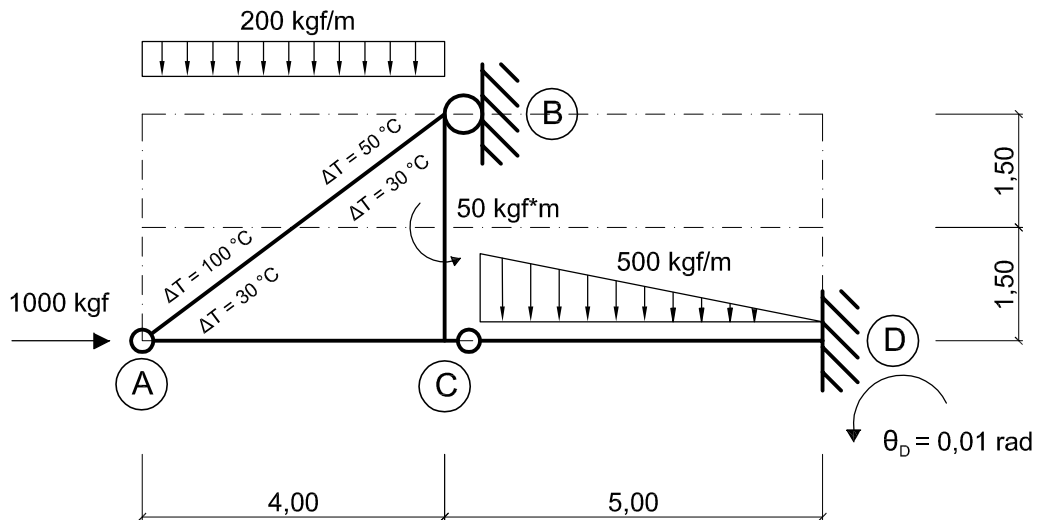
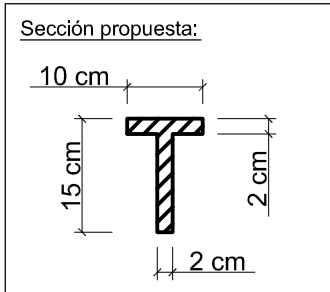
EJERCICIO 3.

Determinar el diagrama de momento de la siguiente estructura utilizando el Método de las Fuerzas, tomando en cuenta los efectos de solocitaciones axiales y momento (Despreciando solamente efectos del cortante).

Datos del sistema estructural:

$$E = 2,1 \cdot 10^6 \text{ kgf/cm}^2$$

$$\alpha_t = 1 \cdot 10^{-5} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$$

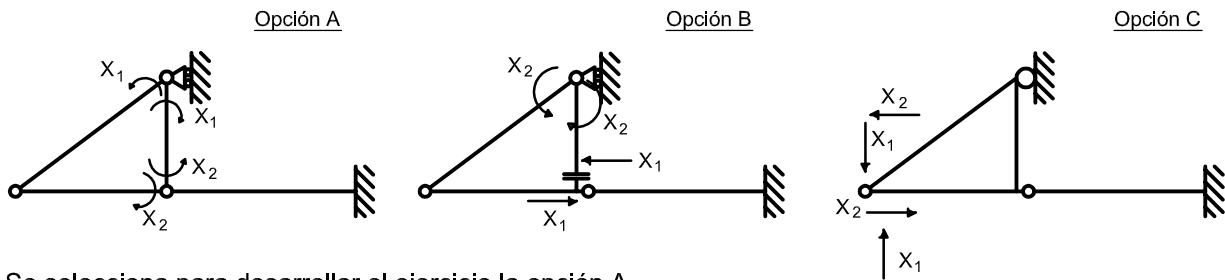
**SOLUCIÓN:**

1. Clasificación estática de la estructura:

$$GL = 3(2) - 8 = -2 \rightarrow GH = 2$$

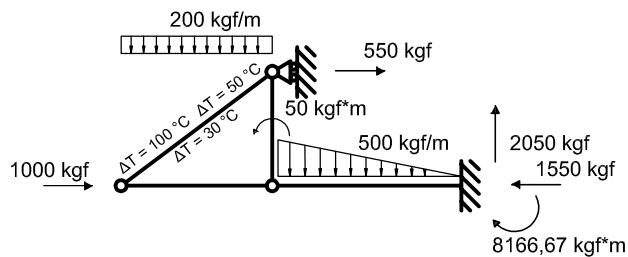
Este es uno de los casos en los que, como se mencionó en el EJERCICIO 1, es conveniente seleccionar como redundantes los momentos en las juntas.

2. Sistemas primarios potenciales: Se presentan 3 posibles grupos de redundantes.



Se selecciona para desarrollar el ejercicio la opción A

3. Sistema primario E⁰:

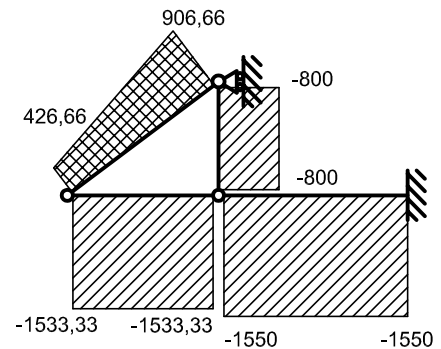


Reacciones:

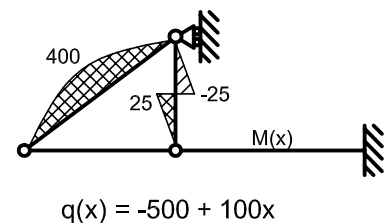
$$\begin{aligned}\sum M_c ABC &\rightarrow B = 550 \text{ kgf} \\ \sum F_y &\rightarrow D_y = 2050 \text{ kgf} \\ \sum F_x &\rightarrow D_x = -1550 \text{ kgf} \\ \sum M_c CD &\rightarrow M_D = -8166,67 \text{ kgf*m}\end{aligned}$$

Para trabajar este tipo de estructuras será necesario realizar un despiece total que permita determinar las solicitaciones. Además, el haber seleccionado los momentos como redundantes da la ventaja de usar las articulaciones como puntos para hacer sumatoria de momento.

Diagramas Axiales.



Diagramas de Momento.

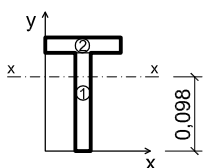


$$q(x) = -500 + 100x$$

$$V(x) = -800 - 500x + 50x^2$$

$$M(x) = -800x - 250x^2 + 16,67x^3$$

Cálculo de la Inercia I_0 y Area A_0 de la sección propuesta:



	A_i	Y_{ci}	$A \cdot Y_{ci}$	I_i
①	$2,6 \cdot 10^{-3}$	$6,5 \cdot 10^{-2}$	$1,69 \cdot 10^{-4}$	$3,66 \cdot 10^{-6}$
②	$2 \cdot 10^{-3}$	$1,4 \cdot 10^{-1}$	$2,80 \cdot 10^{-4}$	$6,67 \cdot 10^{-8}$
Σ	$4,6 \cdot 10^{-3}$		$4,49 \cdot 10^{-4}$	

$$Y_c = \frac{4,49 \cdot 10^{-4}}{4,6 \cdot 10^{-3}} = 0,098 \text{ m}$$

$$I_{x-x} = 3,66 \cdot 10^{-6} + (2,6 \cdot 10^{-3}) \cdot (0,033)^2 + 6,67 \cdot 10^{-8} + (2 \cdot 10^{-3}) \cdot (0,042)^2$$

$$A_0 = 4,6 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$$

$$I_0 x-x = 1,01 \cdot 10^{-5} \text{ m}^4$$

$$EI = 2,12 \cdot 10^5 \text{ kgf} \cdot \text{m}^2$$

$$AE = 9,66 \cdot 10^7 \text{ kgf}$$

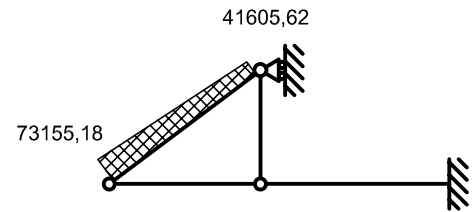
Solicitación Axial por Temperatura:

$$\Delta t_0 A = \frac{\Delta t_s \cdot h_i + \Delta t_i \cdot h_s}{h} = \frac{100 \cdot 0,098 + 30 \cdot 0,052}{0,15} = 75,73 \text{ } ^\circ\text{C}$$

$$\Delta t_0 B = \frac{50 \cdot 0,098 + 30 \cdot 0,052}{0,15} = 43,07 \text{ } ^\circ\text{C}$$

$$Nt A = \Delta t_0 i \cdot \alpha t \cdot AE = 75,73 \cdot (1 \cdot 10^{-5}) \cdot (9,66 \cdot 10^7) = 73155,18 \text{ kgf}$$

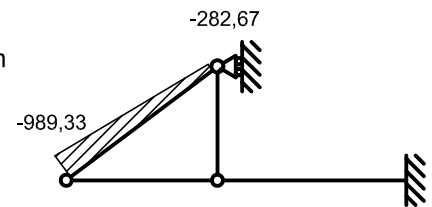
$$Nt B = 43,07 \cdot (1 \cdot 10^{-5}) \cdot (9,66 \cdot 10^7) = 41605,62 \text{ kgf}$$



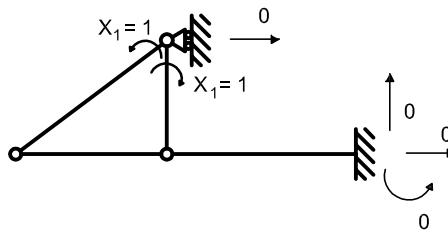
Solicitación de Momento por Temperatura:

$$Mt A = \frac{\Delta(\Delta t) \cdot \alpha t \cdot EI}{h} = \frac{(30-100) \cdot 1 \cdot 10^{-5} \cdot (2,12 \cdot 10^5)}{0,15} = -989,33 \text{ kgf} \cdot \text{m}$$

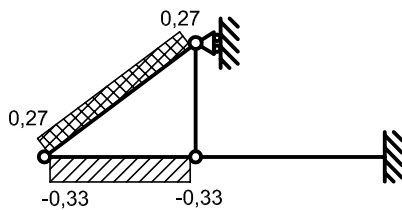
$$Mt B = \frac{(30-50) \cdot 1 \cdot 10^{-5} \cdot (2,12 \cdot 10^5)}{0,15} = -282,67 \text{ kgf} \cdot \text{m}$$



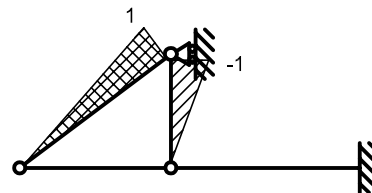
4. Sistema complementario E¹:



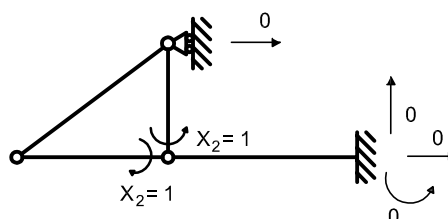
Diagramas Axiales.



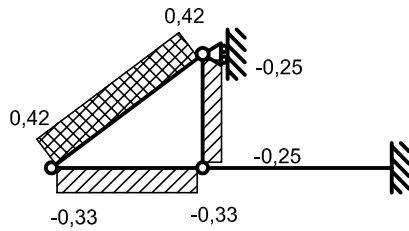
Diagramas de Momento.



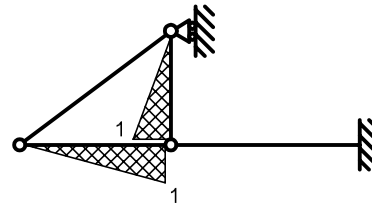
Sistema complementario E²:



Diagramas Axiales.



Diagramas de Momento.



5. Ecuaciones de compatibilidad:

$$\begin{cases} \theta_{1r} = \theta_{10} + F_{11} \cdot X_1 + F_{12} \cdot X_2 \\ \theta_{2r} = \theta_{20} + F_{21} \cdot X_1 + F_{22} \cdot X_2 \end{cases}$$

6. Obtención de desplazamientos del problema primario y coeficientes de flexibilidad utilizando PTVCE:

θ_{10} :

$W_{ext} = \theta_{10} \cdot 1$

$$\begin{aligned} W_{int} = & \int_0^5 \frac{400}{EI} dx + \int_0^{1,5} \frac{25}{EI} dx + \int_0^{1,5} \frac{-0,5}{EI} dx + \int_0^5 \frac{426,66}{AE} dx + \int_0^4 \frac{-1533,33}{AE} dx + \int_0^5 \frac{73155,18}{AE} dx \\ & + \int_0^5 \frac{-989,33}{EI} dx + \int_0^5 \frac{-282,67}{EI} dx + \int_0^5 \frac{1}{EI} dx = -2,11 \cdot 10^{-3} \end{aligned}$$

$W_{ext} = W_{int}$

$\theta_{10} = -2,11 \cdot 10^{-3}$

θ_{20} :

$W_{ext} = \theta_{20} \cdot 1$

$$\begin{aligned}
 W_{int} = & \int_0^{1,5} \frac{25}{EI} dx + \int_0^{1,5} \frac{1}{EI} dx + \int_0^{0,5} \frac{0,5}{EI} dx + \int_0^{1,5} \frac{-25}{EI} dx + \int_0^{0,5} \frac{0,5}{EI} dx + \int_0^5 \frac{426,66}{AE} dx + \int_0^{906,66} \frac{0,42}{AE} dx \\
 & + \int_0^3 \frac{-800}{AE} dx + \int_0^{-0,25} \frac{-0,25}{AE} dx + \int_0^4 \frac{-1533,33}{AE} dx + \int_0^{-0,33} \frac{-0,33}{AE} dx + \int_0^5 \frac{73155,18}{AE} dx + \int_0^{41605,62} \frac{0,42}{AE} dx
 \end{aligned}$$

$$W_{int} = 1,32 \cdot 10^{-3}$$

$$W_{ext} = W_{int}$$

$$\theta_{20} = 1,32 \cdot 10^{-3}$$

F₁₁:

$$W_{ext} = F_{11} \cdot 1$$

$$\begin{aligned}
 W_{int} = & \int_0^5 \frac{1}{EI} dx + \int_0^1 \frac{1}{EI} dx + \int_0^3 \frac{-1}{EI} dx + \int_0^1 \frac{-1}{EI} dx + \int_0^5 \frac{0,27}{AE} dx + \int_0^{0,27} \frac{0,27}{AE} dx \\
 & + \int_0^4 \frac{-0,33}{AE} dx + \int_0^{-0,33} \frac{-0,33}{AE} dx = 1,26 \cdot 10^{-5}
 \end{aligned}$$

$$W_{ext} = W_{int}$$

$$F_{11} = 1,26 \cdot 10^{-5}$$

F₂₂:

$$W_{ext} = F_{22} \cdot 1$$

$$\begin{aligned}
 W_{int} = & \int_0^4 \frac{1}{EI} dx + \int_0^1 \frac{1}{EI} dx + \int_0^3 \frac{1}{EI} dx + \int_0^1 \frac{1}{EI} dx + \int_0^5 \frac{0,42}{AE} dx + \int_0^{0,42} \frac{0,42}{AE} dx
 \end{aligned}$$

$$+ \int_0^3 \frac{-0,25}{AE} dx + \int_0^4 \frac{-0,33}{AE} dx = 1,10 \cdot 10^{-5}$$

Wext = Wint

$F_{22} = 1,10 \cdot 10^{-5}$

F₁₂:

$$W_{ext} = F_{12} \cdot 1$$

$$W_{int} = \int_0^3 \frac{1}{EI} dx + \int_0^5 \frac{0,27}{AE} dx + \int_0^4 \frac{-0,33}{AE} dx$$

$$W_{int} = -2,35 \cdot 10^{-6}$$

$$W_{ext} = W_{int}$$

$F_{12} = F_{21} = -2,35 \cdot 10^{-6}$

7. Solución de las ecuaciones de compatibilidad :

$$\begin{cases} 0 = -2,11 \cdot 10^{-3} + 1,26 \cdot 10^{-5} X_1 - 2,35 \cdot 10^{-6} X_2 \\ 0 = 1,32 \cdot 10^{-3} - 2,35 \cdot 10^{-6} X_1 + 1,1 \cdot 10^{-5} X_2 \end{cases}$$

$X_1 = 151,10 \text{ kgf} \cdot \text{m} \quad X_2 = -87,72 \text{ kgf} \cdot \text{m}$

Matriz de flexibilidad:

$$F = \begin{bmatrix} 1,26 \cdot 10^{-5} & -2,35 \cdot 10^{-6} \\ -2,35 \cdot 10^{-6} & 1,1 \cdot 10^{-5} \end{bmatrix}$$

8. Sustitución de redundantes y cálculo de reacciones :

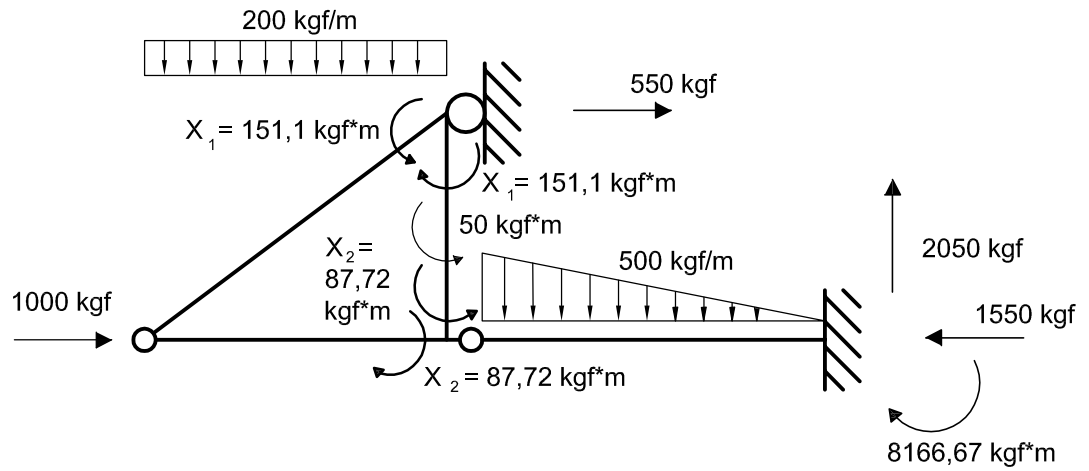
Reacciones:

$$\sum M_C \text{ ABC} \rightarrow B = 550 \text{ kgf}$$

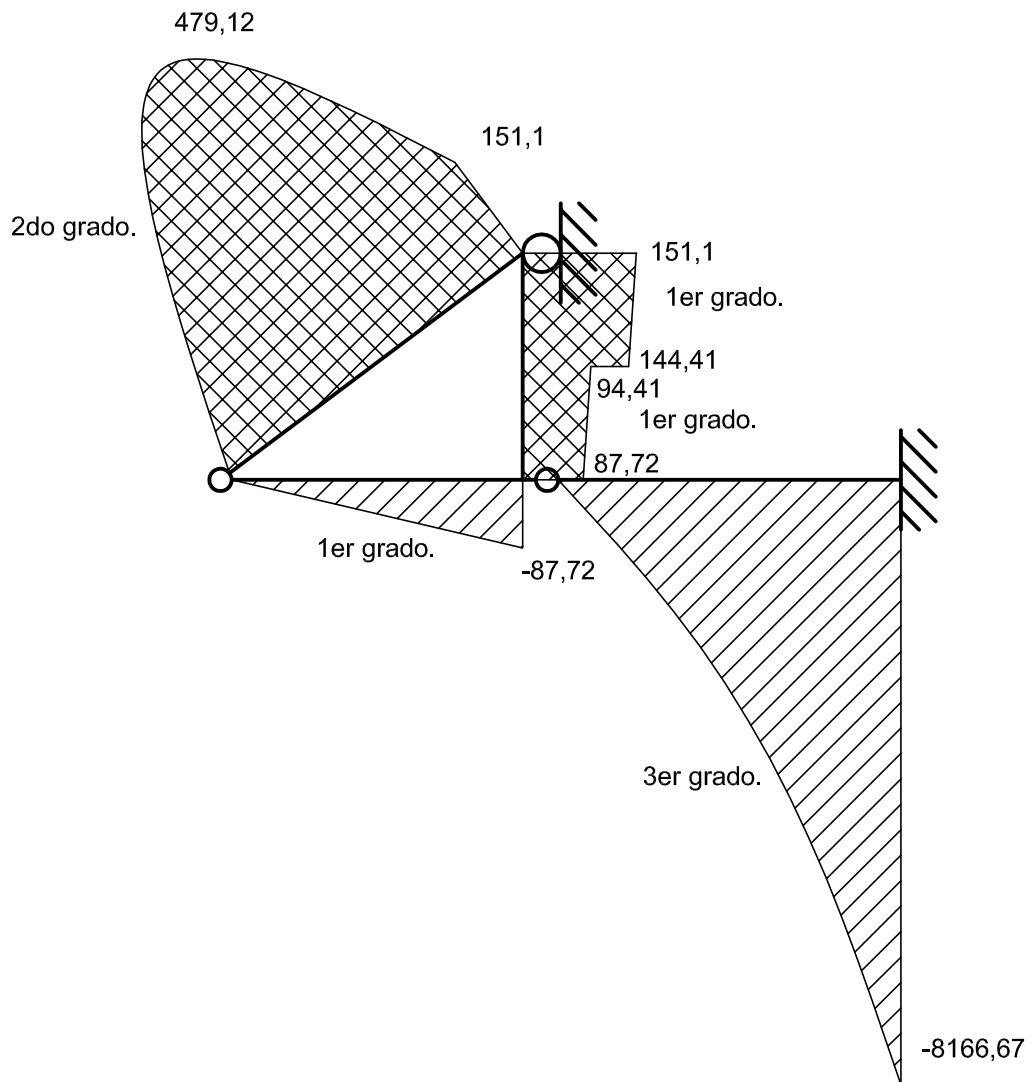
$$\sum F_y \rightarrow D_y = 2050 \text{ kgf}$$

$$\sum F_x \rightarrow D_x = -1550 \text{ kgf}$$

$$\sum M_C \text{ CD} \rightarrow M_D = -8166,67 \text{ kgf} \cdot \text{m}$$



9. Diagrama de momento real:



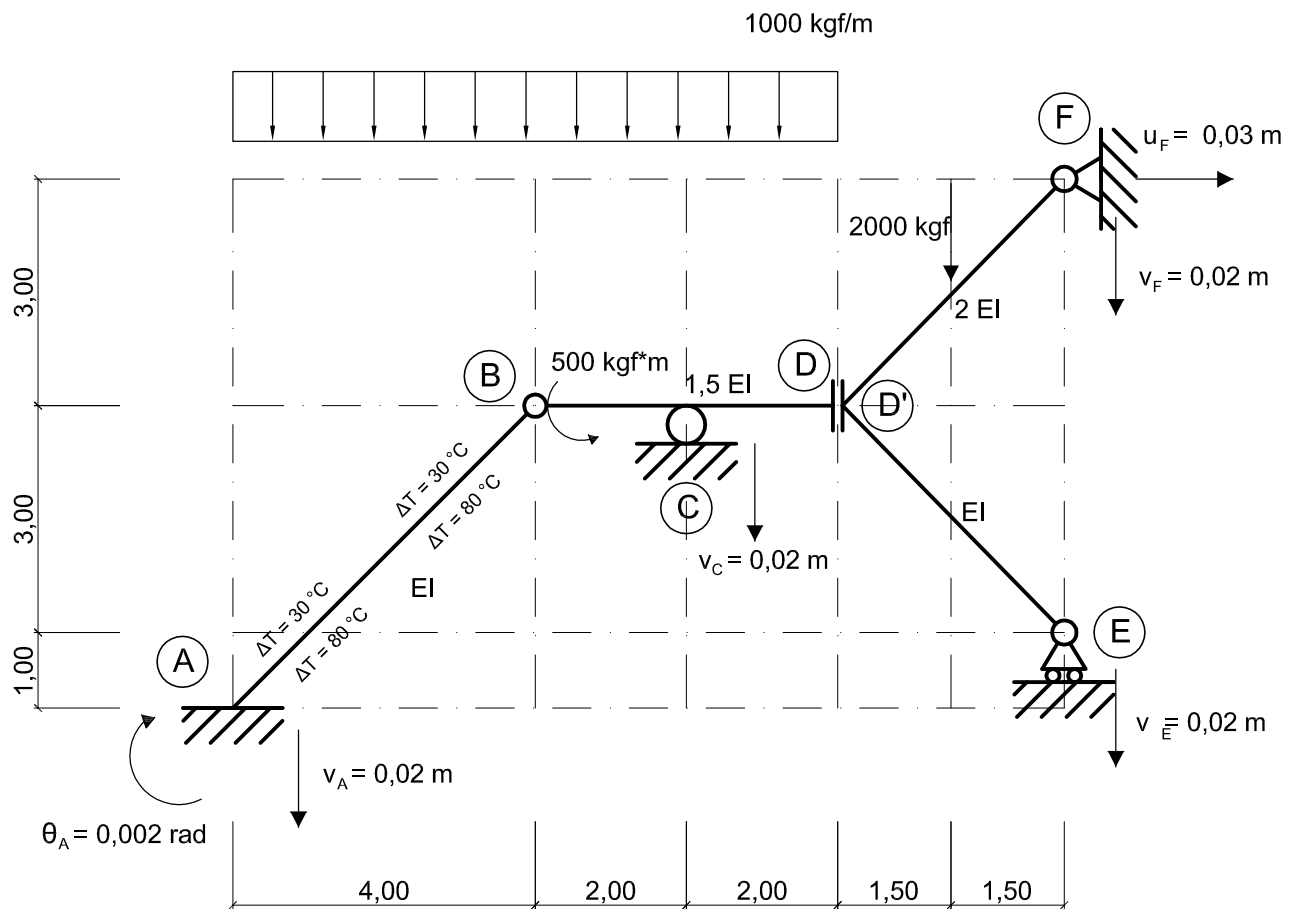
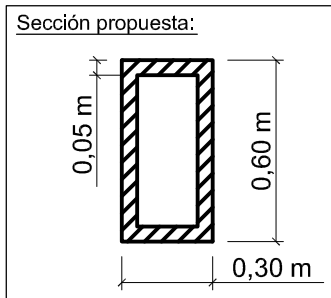
EJERCICIO 4.

Determinar el diagrama de momento de la siguiente estructura utilizando el Método de las Fuerzas, despreciando los efectos de solocitaciones axiales y cortantes (por cargas). Tomar en cuenta efectos axial y transversal por temperatura.

Datos del sistema estructural:

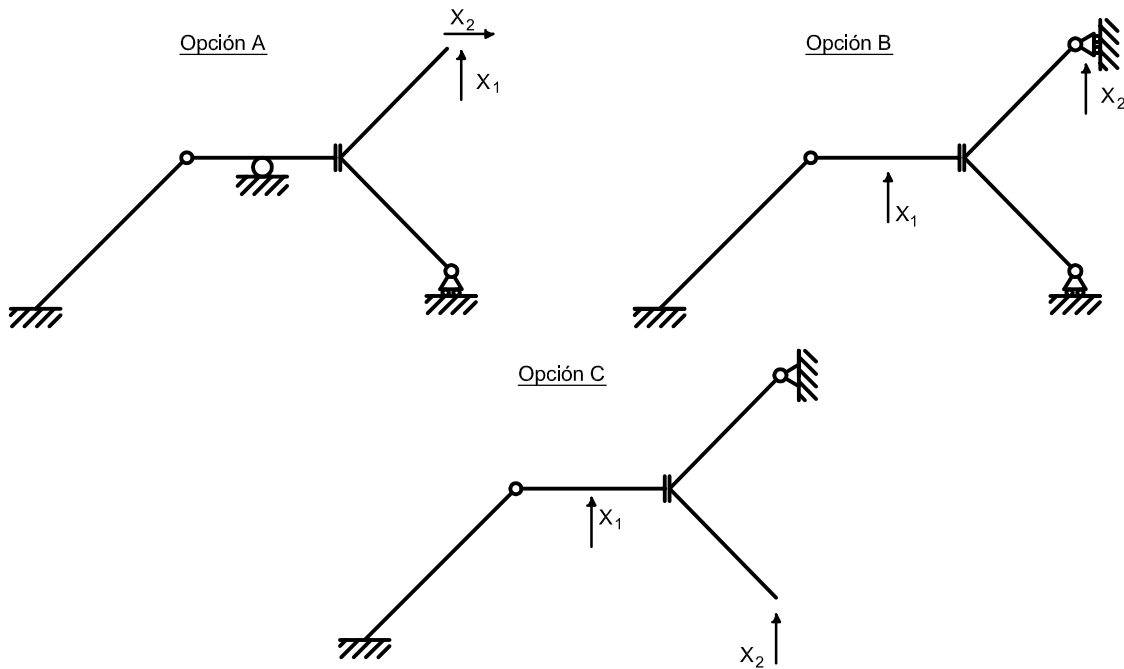
$$E = 2,1 \cdot 10^{10} \text{ kgf/m}^2$$

$$\alpha_t = 5 \cdot 10^{-5} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$$

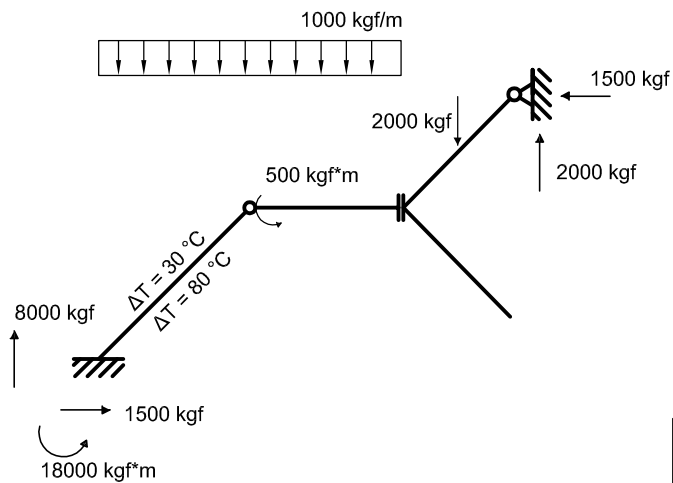


SOLUCIÓN:1. Clasificación estática de la estructura:

$$GL = 3(3) - 11 = -2 \rightarrow GH = 2$$

2. Sistemas primarios potenciales: Se presentan 3 posibles grupos de redundantes.

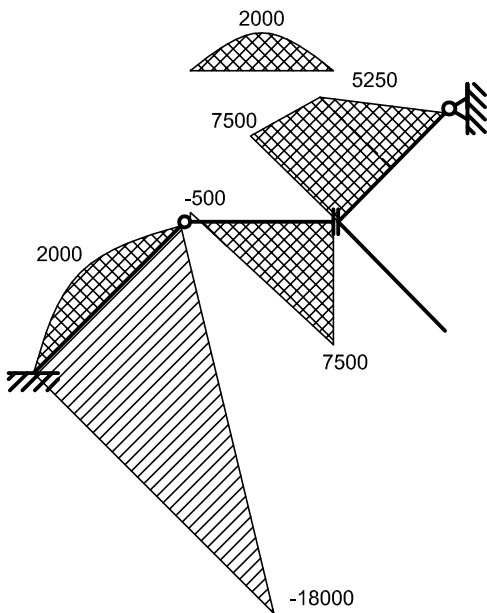
Se selecciona para desarrollar el ejercicio la opción C

3. Sistema primario E⁰:Reacciones:

$$\begin{aligned} \sum F_y D'EF &\rightarrow F_y = 2000 \text{ kgf} \\ \sum F_y ABCD &\rightarrow A_y = 8000 \text{ kgf} \\ \sum M_B (BCD) &\rightarrow M_D = 7500 \text{ kgf*m} \\ \sum M_{D'} (D'EF) &\rightarrow F_x = -1500 \text{ kgf} \\ \sum F_x &\rightarrow A_x = 1500 \text{ kgf} \\ \sum M_B (BA) &\rightarrow M_A = 18000 \text{ kgf*m} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} AE &= 1,68 \cdot 10^9 \text{ kgf} \\ EI &= 6,97 \cdot 10^7 \text{ kgf*m}^2 \end{aligned}$$

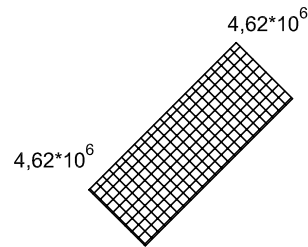
Diagramas de Momento.



Solicitación Axial por Temperatura:

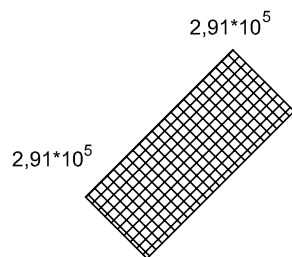
$$\Delta t_0 = \frac{\Delta t_s + \Delta t_i}{2} = \frac{30 + 80}{2} = 55 \text{ } ^\circ\text{C}$$

$$N_t = \Delta t_0 \cdot \alpha t \cdot AE = 55 \cdot (5 \cdot 10^{-5}) \cdot (1,68 \cdot 10^9) = 4,62 \cdot 10^6 \text{ kgf}$$

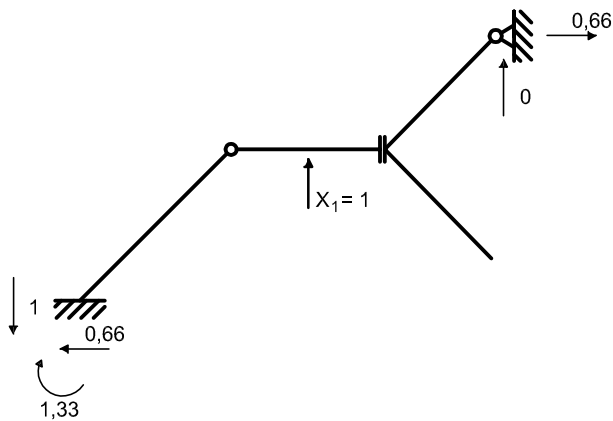


Solicitación de Momento por Temperatura:

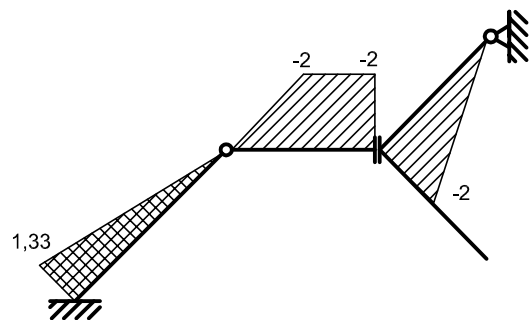
$$M_t = \frac{\Delta(\Delta t) \cdot \alpha t \cdot EI}{h} = \frac{(80-30) \cdot (5 \cdot 10^{-5}) \cdot (6,97 \cdot 10^7)}{0,6} = 2,91 \cdot 10^5 \text{ kgf}\cdot\text{m}$$



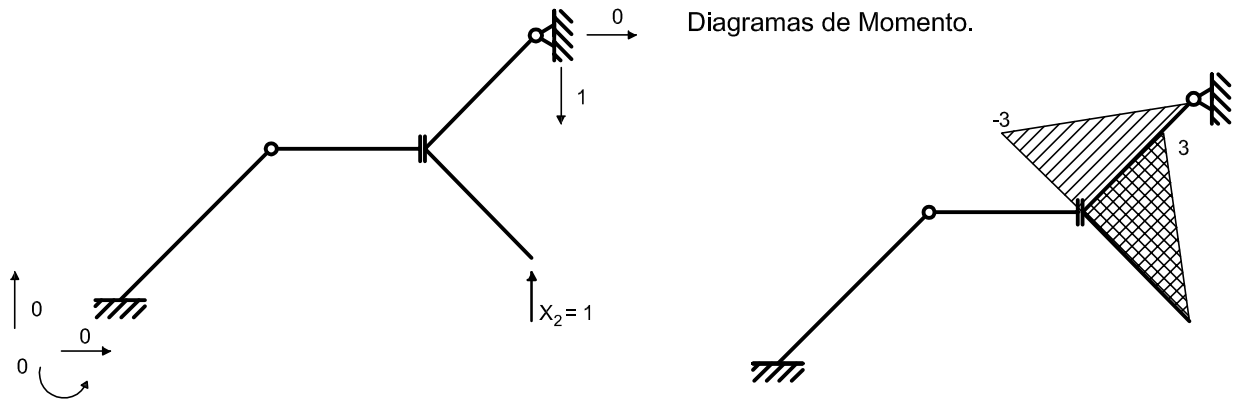
4. Sistema complementario E^1 :



Diagramas de Momento.



Sistema complementario E^2 :



Diagramas de Momento.

5. Ecuaciones de compatibilidad:

$$\begin{cases} v_{1r} = v_{10} + F_{11} \cdot X_1 + F_{12} \cdot X_2 \\ v_{2r} = v_{20} + F_{21} \cdot X_1 + F_{22} \cdot X_2 \end{cases}$$

6. Obtención de desplazamientos del problema primario y coeficientes de flexibilidad utilizando PTVCE:

v_{10} :

$$W_{ext} = v_{10} \cdot 1 + (0,002) \cdot (1,33) + (0,03) \cdot (0,66) \rightarrow W_{ext} = v_{10} + 2,3 \cdot 10^{-2}$$

$$\begin{aligned} W_{int} = & \int_0^{5,66} \frac{2000}{EI} dx + \int_0^{5,66} \frac{-18000}{EI} dx + \int_0^2 \frac{2000}{1,5EI} dx \\ & + \int_0^2 \frac{2000}{1,5EI} dx + \int_0^2 \frac{3500}{1,5EI} dx + \int_0^2 \frac{3500}{1,5EI} dx \\ & + \int_0^{2,12} \frac{7500}{2EI} dx + \int_0^{2,12} \frac{5250}{2EI} dx + \int_0^{5,66} \frac{4620000}{AE} dx \end{aligned}$$

$$+ \int_0^{5,66} \frac{291000}{EI} dx + \int_{5,66}^{10} \frac{1,33}{EI} dx = 3,3 \cdot 10^{-2}$$

$$W_{ext} = W_{int}$$

$$v_{10} + 2,3 \cdot 10^{-2} = 3,3 \cdot 10^{-2}$$

$$v_{10} = 1 \cdot 10^{-2}$$

v_{20} :

$$W_{ext} = v_{20} \cdot 1 + (0,03) \cdot (0) \rightarrow W_{ext} = v_{20}$$

$$W_{int} = \int_0^{2,12} \frac{7500}{2EI} dx + \int_{2,12}^{5} \frac{5250}{2EI} dx + \int_5^{10} \frac{-3}{2EI} dx + \int_{10}^{12} \frac{-1,5}{2EI} dx + \int_0^{2,12} \frac{5250}{2EI} dx + \int_{2,12}^{5} \frac{-1,5}{2EI} dx = -2,62 \cdot 10^{-4}$$

$$W_{ext} = W_{int}$$

$$v_{20} = -2,62 \cdot 10^{-4}$$

F_{11} :

$$W_{ext} = F_{11} \cdot 1$$

$$W_{int} = \int_0^{5,66} \frac{1,33}{EI} dx + \int_{5,66}^{10} \frac{1,33}{EI} dx + \int_0^2 \frac{-2}{1,5EI} dx + \int_2^5 \frac{-2}{1,5EI} dx + \int_5^{10} \frac{-2}{1,5EI} dx + \int_{10}^{12} \frac{-2}{1,5EI} dx + \int_0^{4,24} \frac{-2}{2EI} dx + \int_{4,24}^{10} \frac{-2}{2EI} dx = 1,89 \cdot 10^{-7}$$

$$W_{ext} = W_{int}$$

$$F_{11} = 1,89 \cdot 10^{-7}$$

F_{22} :

$$W_{ext} = F_{22} \cdot 1$$

$$W_{int} = \int_0^{4,24} \frac{-3}{2EI} dx + \int_{4,24}^{10} \frac{-3}{2EI} dx + \int_0^3 \frac{3}{EI} dx + \int_3^{10} \frac{3}{EI} dx = 2,74 \cdot 10^{-7}$$

$$W_{ext} = W_{int}$$

$$F_{22} = 2,74 \cdot 10^{-7}$$

F_{12} :

$$W_{ext} = F_{12} \cdot 1$$

$$W_{int} = \int_0^{4,24} \frac{-2}{2EI} \cdot \frac{-3}{2EI} dx = 6,10 \cdot 10^{-8}$$

$$W_{ext} = W_{int}$$

$$F_{12} = F_{21} = 6,10 \cdot 10^8$$

7. Solución de las ecuaciones de compatibilidad :

$$\begin{cases} 0 = 1 \cdot 10^{-2} + 1,89 \cdot 10^{-7} X_1 + 6,1 \cdot 10^{-8} X_2 \\ 0 = -2,62 \cdot 10^{-4} + 6,1 \cdot 10^{-8} X_1 + 2,74 \cdot 10^{-7} X_2 \end{cases}$$

$$X_1 = -57300 \text{ kgf} \quad X_2 = 13700 \text{ kgf}$$

Matriz de flexibilidad:

$$F = \begin{bmatrix} 1,89 \cdot 10^{-7} & 6,1 \cdot 10^{-8} \\ 6,1 \cdot 10^{-8} & 2,74 \cdot 10^{-7} \end{bmatrix}$$

8. Sustitución de redundantes y cálculo de reacciones :

Reacciones:

$$\sum F_y \text{ D'EF} \rightarrow F_y = -11700 \text{ kgf}$$

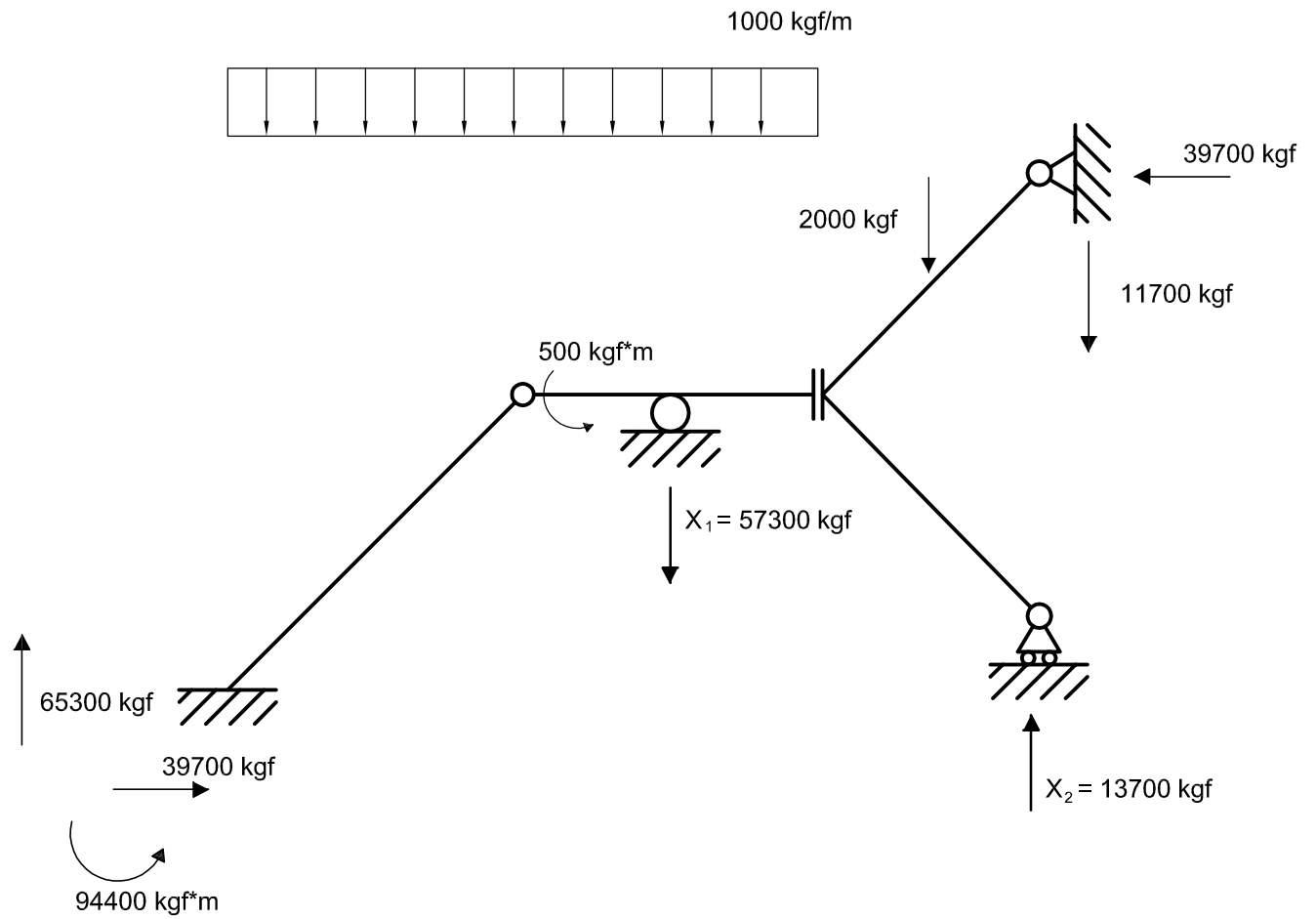
$$\sum F_y \text{ ABCD} \rightarrow A_y = 65300 \text{ kgf}$$

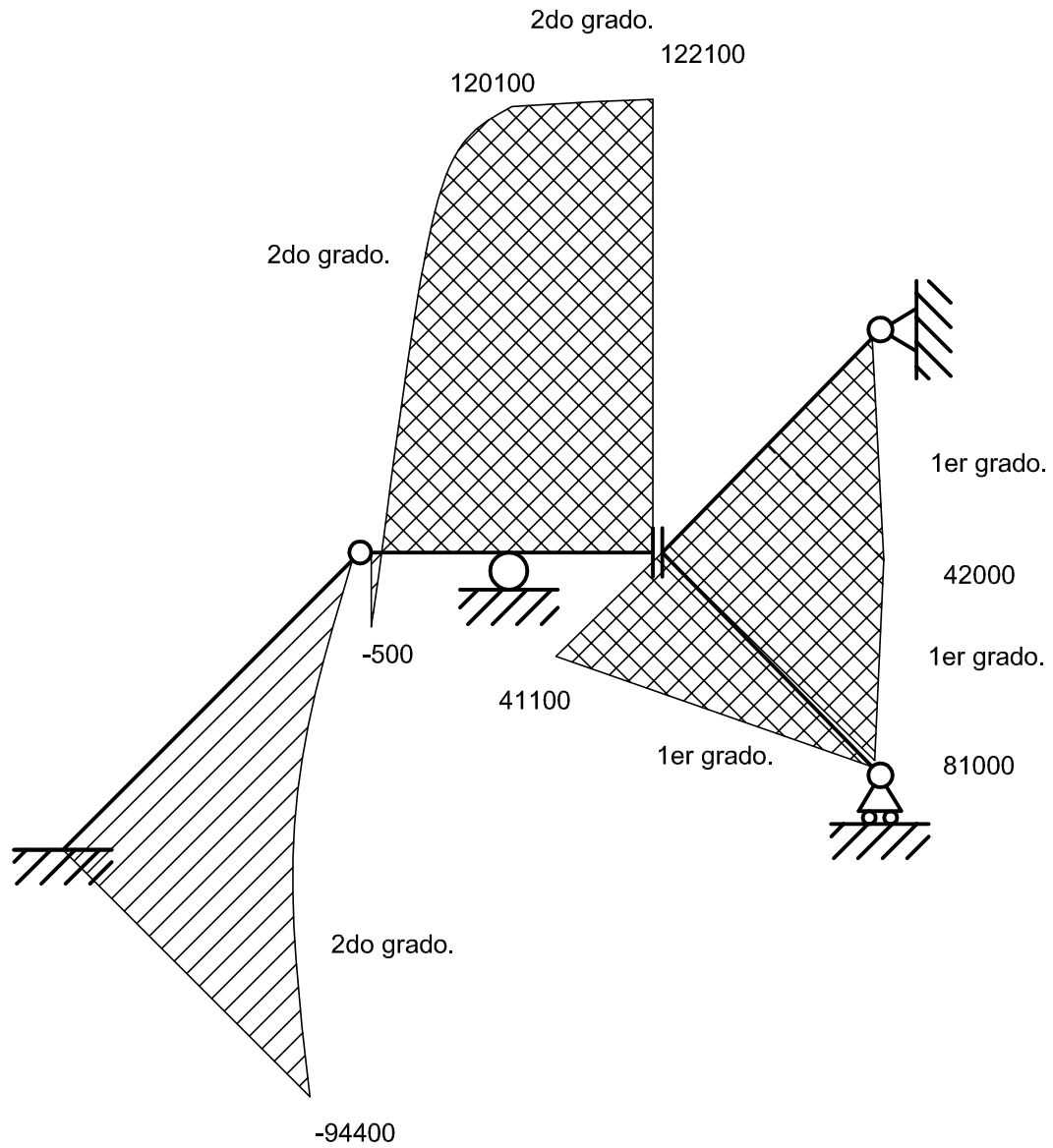
$$\sum M_B \text{ (BCD)} \rightarrow M_D = 122100 \text{ kgf} \cdot \text{m}$$

$$\sum M_D \text{ (D'EF)} \rightarrow F_x = -39700 \text{ kgf}$$

$$\sum F_x \rightarrow A_x = 39700 \text{ kgf}$$

$$\sum M_B \text{ (BA)} \rightarrow M_A = 94400 \text{ kgf} \cdot \text{m}$$



9. Diagrama de momento real:

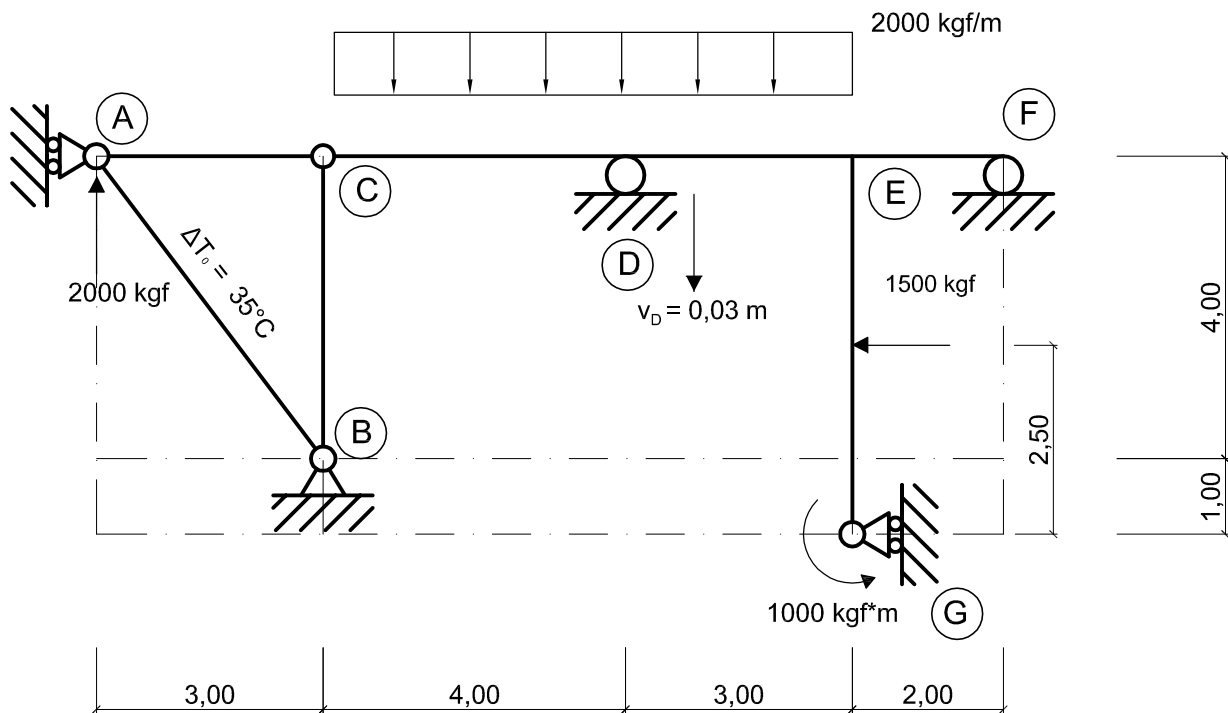
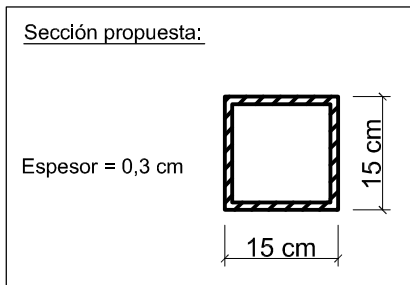
EJERCICIO 5.

Para la siguiente estructura, usando el Método de las Fuerzas, determinar los diagramas de momentos. Considerar las solicitaciones axiales en los elementos AB, AC y BC.

Datos del sistema estructural:

$$E = 2,1 \cdot 10^6 \text{ kgf/cm}^2$$

$$\alpha_t = 1,2 \cdot 10^{-5} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$$

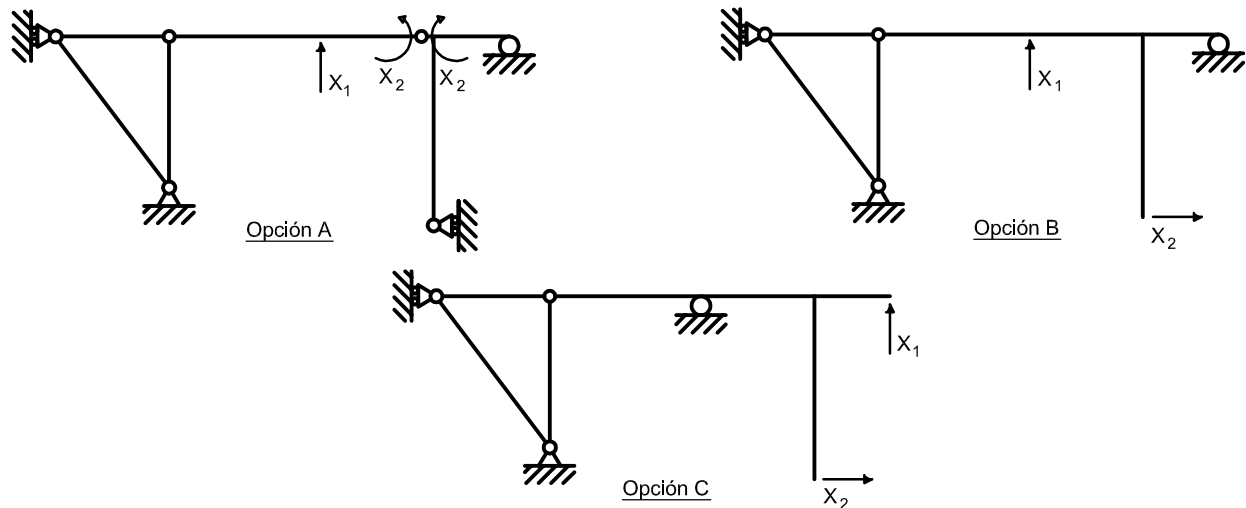


SOLUCIÓN:

1. Clasificación estática de la estructura:

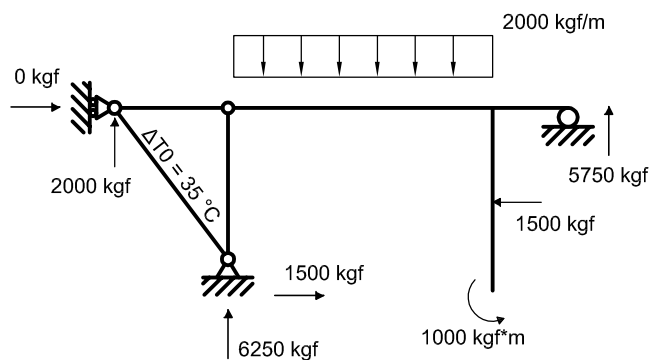
$$GL = 3(2) - (2+6) = -2 \rightarrow GH = 2$$

2. Sistemas primarios potenciales: Se presentan 3 posibles grupos de redundantes.



Se selecciona para desarrollar el ejercicio la opción B

3. Sistema primario E^0 :



Reacciones:

$$\sum M_C \text{ CDEFG} \rightarrow F = 5750 \text{ kgf}$$

$$\sum F_y \rightarrow B_y = 6250 \text{ kgf}$$

$$\sum M_C \text{ ABC} \rightarrow B_x = 1500 \text{ kgf}$$

$$\sum F_x \rightarrow A_x = 0 \text{ kgf}$$

Miembro CE:

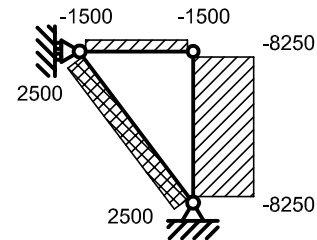
$$q(x) = -2000$$

$$V(x) = 8250 - 2000x$$

$$M(x) = 8250x - 1000x^2$$

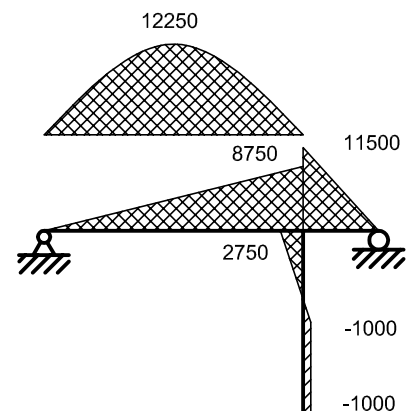
Se debe estar atento de donde se definen los ejes de coordenadas locales para cada ecuación para así colocar correctamente los límites de integración.

Diagramas Axiales.

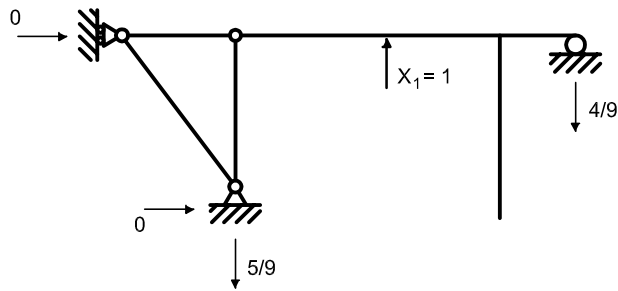


Los miembros AB, BC y AC por su configuración de triarticulados, y con cargas únicamente en los nodos, se comportan como una Armadura y sólo desarrollan sollicitación axial.

Diagramas de Momento.

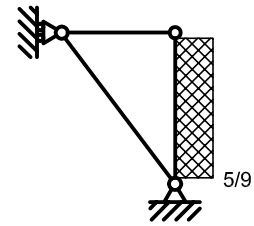


4. Sistema complementario E^1 :

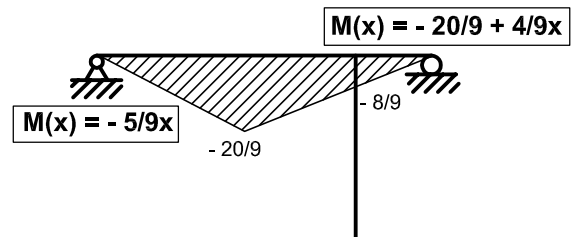


El diagrama de momento generado en los miembros CDE es un triángulo (1er orden) con un cambio de pendiente que no está ubicado en el centro. Esto ocasiona que, al momento de integrarlo con los diagramas del sistema E^0 , no sea sencillo dividir los diagramas en figuras conocidas para utilizar las integrales gráficas. Por lo tanto, resulta más conveniente integrar utilizando las ecuaciones que definen dichos diagramas.

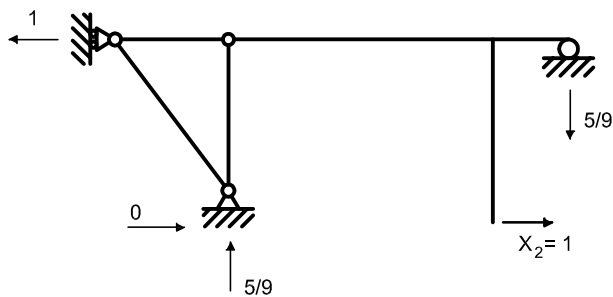
Diagramas Axiales.



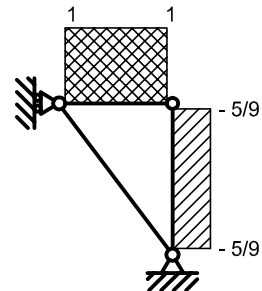
Diagramas de Momento.



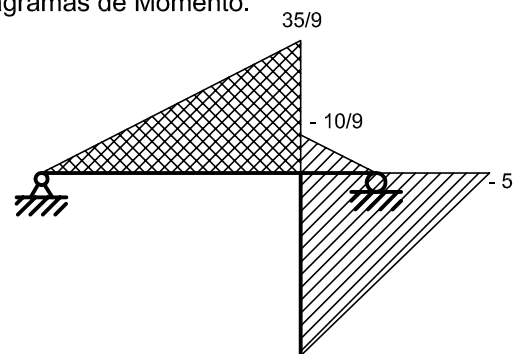
Sistema complementario E^2 :



Diagramas Axiales.



Diagramas de Momento.



5. Ecuaciones de compatibilidad:

$$\begin{cases} v_{1r} = v_{10} + F_{11} \cdot X_1 + F_{12} \cdot X_2 \\ u_{2r} = u_{20} + F_{21} \cdot X_1 + F_{22} \cdot X_2 \end{cases}$$

6. Obtención de desplazamientos del problema primario y coeficientes de flexibilidad utilizando PTVCE :

 v_{10} :

$$W_{ext} = v_{10} \cdot 1$$

$$AE = 3,70 \cdot 10^7 \text{ kgf}$$

$$EI = 1,34 \cdot 10^5 \text{ kgf} \cdot \text{m}^2$$

$$W_{int} = \int_0^4 \frac{(-1000x^2 + 8250x)(-5/9x)}{EI} dx + \int_4^7 \frac{(-1000x^2 + 8250x)(4/9x - 4)}{EI} dx + \int_0^2 \frac{11500}{EI} dx - \frac{8/9}{EI} dx$$

$$+ \int_0^4 \frac{-8250}{AE} dx + \frac{5/9}{AE} dx = -1,037$$

$W_{ext} = W_{int}$

$v_{10} = -1,037$

 u_{20} :

$$W_{ext} = u_{20} \cdot 1$$

$$W_{int} = \int_0^7 \frac{12250}{EI} dx + \frac{35/9}{EI} dx + \int_0^7 \frac{8750}{EI} dx + \frac{35/9}{EI} dx + \int_0^2 \frac{11500}{EI} dx - \frac{10/9}{EI} dx$$

$$+ \int_0^{5/2} \frac{-1000}{EI} dx - \frac{5/2}{EI} dx + \int_0^{5/2} \frac{-1000}{EI} dx + \frac{2750}{EI} dx - \frac{5/2}{EI} dx - \frac{5}{EI} dx + \int_0^4 \frac{-8250}{AE} dx - \frac{5/9}{AE} dx$$

$$+ \int_0^3 \frac{-1500}{AE} dx = 1,307$$

Wext = Wint

$u_{20} = 1,307$

F₁₁:

Wext = F₁₁*1

$$\begin{aligned} \text{Wint} = & \int_0^4 \frac{-20/9}{EI} dx + \int_0^3 \frac{-20/9}{EI} dx + \int_0^2 \frac{-8/9}{EI} dx \\ & + \int_0^4 \frac{5/9}{AE} dx = 0,00011 \end{aligned}$$

Wext = Wint

$F_{11} = 0,00011$

F₂₂:

Wext = F₂₂*1

$$\begin{aligned} \text{Wint} = & \int_0^7 \frac{35/9}{EI} dx + \int_0^2 \frac{-10/9}{EI} dx + \int_0^5 \frac{-5}{EI} dx \\ & + \int_0^4 \frac{-5/9}{AE} dx + \int_0^3 \frac{1}{AE} dx = 0,00058 \end{aligned}$$

Wext = Wint

$F_{22} = 0,00058$

F₁₂:

Wext = F₁₂*1

$$\begin{aligned}
 W_{int} = & \int_0^4 \frac{20}{9} dx + \int_0^3 \frac{20}{9} dx + \int_0^2 \frac{-10}{9} dx \\
 & + \int_0^4 \frac{-5}{9} dx + \int_0^4 \frac{5}{9} dx = -0,00015
 \end{aligned}$$

$W_{ext} = W_{int}$
 $F_{12} = F_{21} = -0,00015$

7. Solución de las ecuaciones de compatibilidad :

$$\begin{cases}
 -0,03 = -1,037 + 0,00011 \cdot X_1 - 0,00015 \cdot X_2 \\
 0 = 1,307 - 0,00015 \cdot X_1 + 0,00058 \cdot X_2
 \end{cases}$$

$$X_1 = 9210 \text{ kgf} \quad X_2 = 79,14 \text{ kgf}$$

Matriz de flexibilidad:

$$F = \begin{bmatrix} 0,00011 & -0,00015 \\ -0,00015 & 0,00058 \end{bmatrix}$$

8. Sustitución de redundantes y cálculo de reacciones :

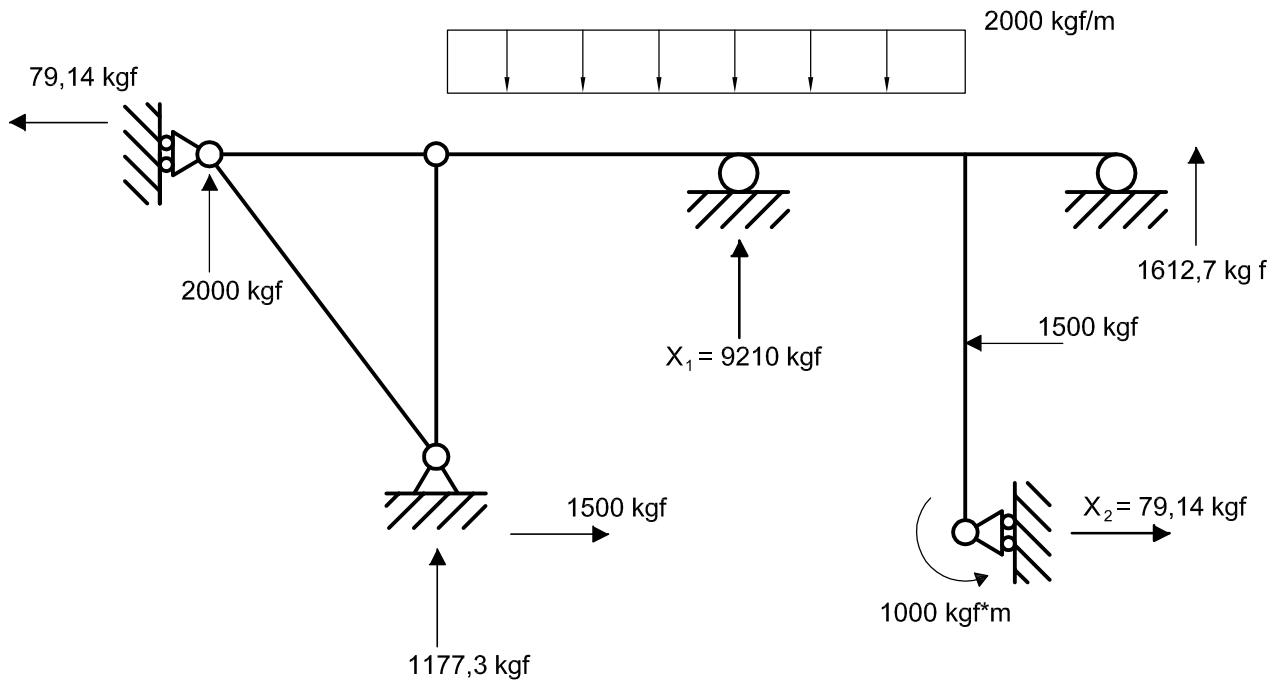
Reacciones:

$$\sum M_c CDEFG \rightarrow F = 1612,7 \text{ kgf}$$

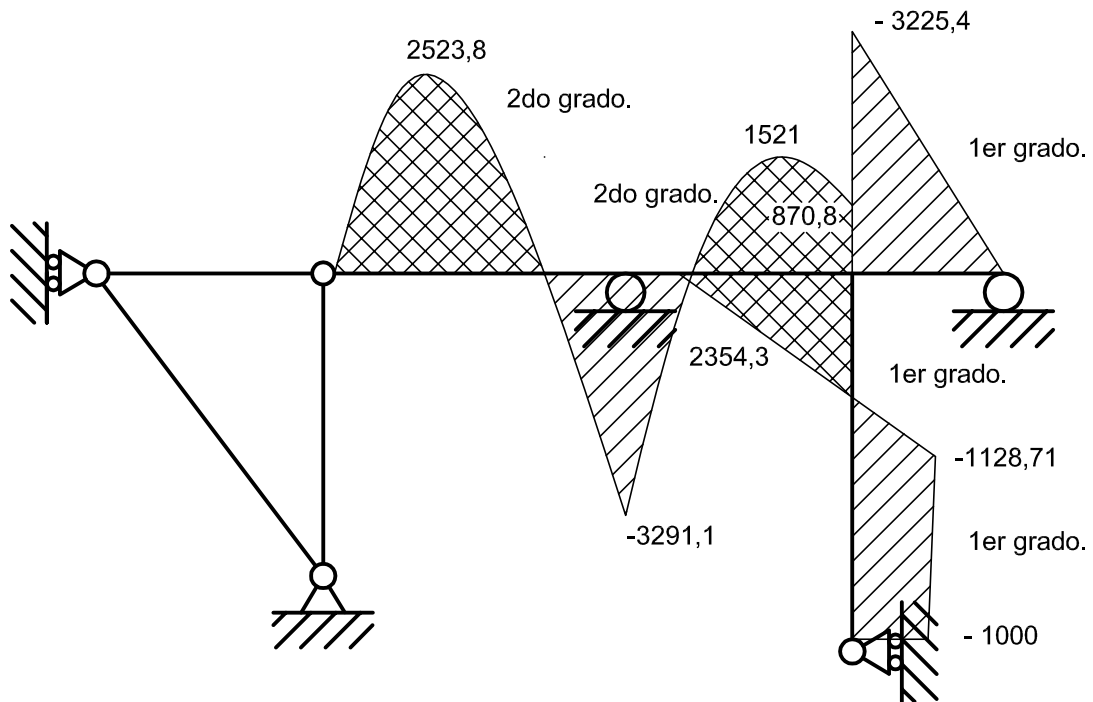
$$\sum F_y \rightarrow B_y = 1177,3 \text{ kgf}$$

$$\sum M_c ABC \rightarrow B_x = 1500 \text{ kgf}$$

$$\sum F_x \rightarrow A_x = -79,14 \text{ kgf}$$



9. Diagrama de momento real:



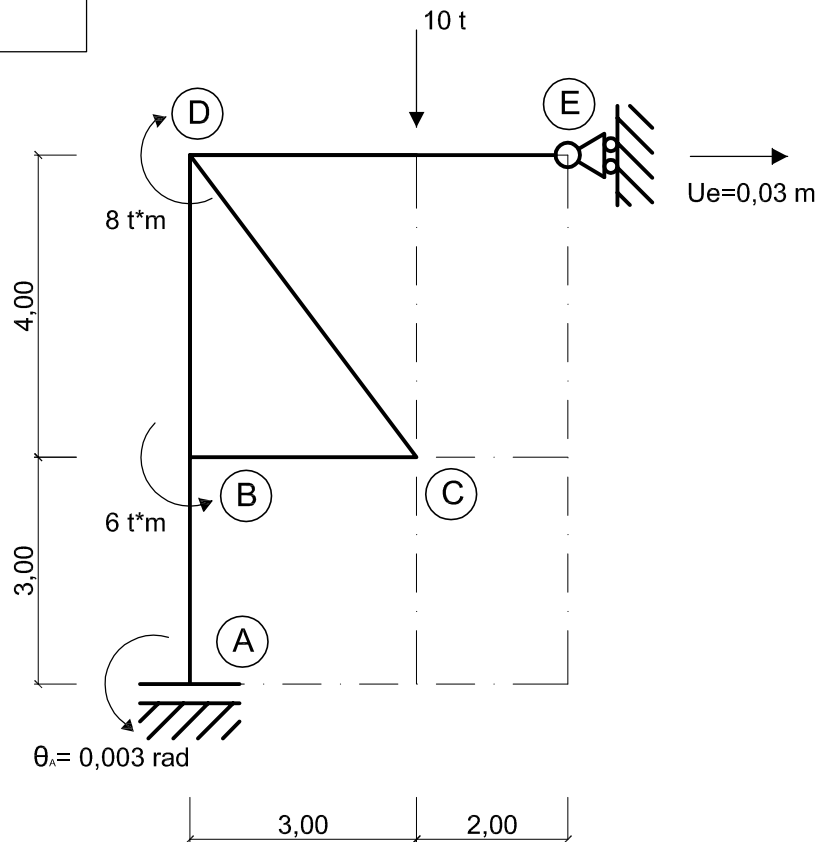
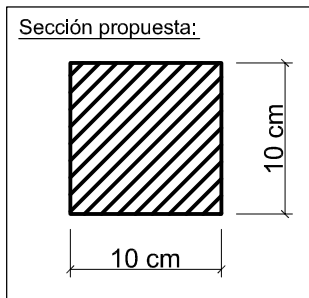
EJERCICIO 6.

Determine utilizando el Método de las Fuerzas, los diagramas de momentos de la siguiente Estructura. Considerar las solicitaciones axiales y momento (despreciar las cortantes).

Datos del sistema estructural:

$$E = 15100 \sqrt{f'c}$$

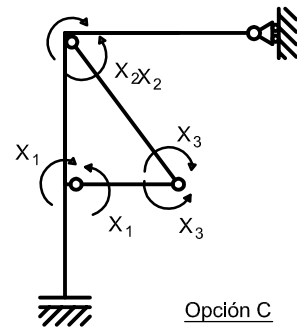
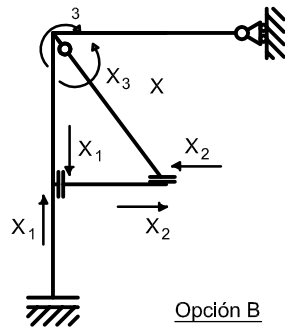
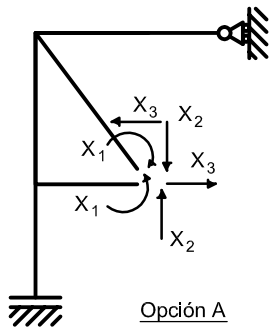
$$f'c = 250 \text{ kgf/cm}^2$$

**SOLUCIÓN:**

1. Clasificación estática de la estructura:

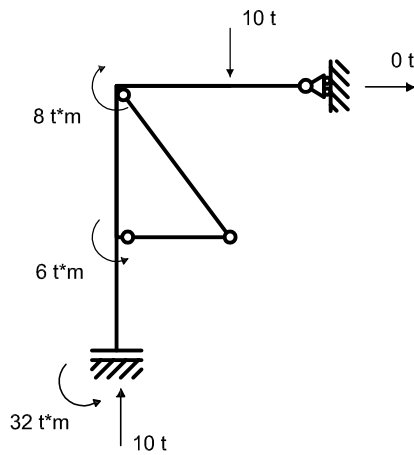
$$GL = 3(5) - (3+15) = -3 \rightarrow GH = 3$$

2. Sistemas primarios potenciales: Se presentan 3 posibles grupos de redundantes.

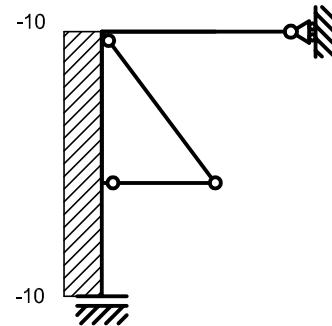


Se selecciona para desarrollar el ejercicio la opción C.

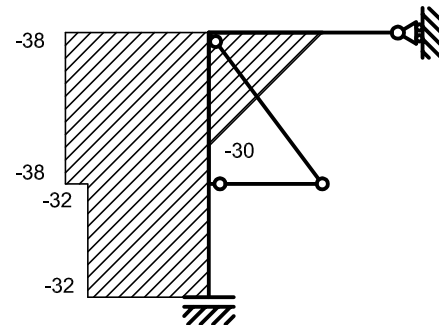
3. Sistema primario E⁰:



Diagramas Axiales.



Diagramas de Momento.

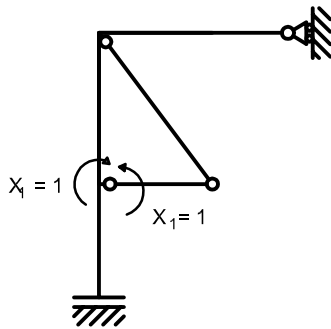


Reacciones:

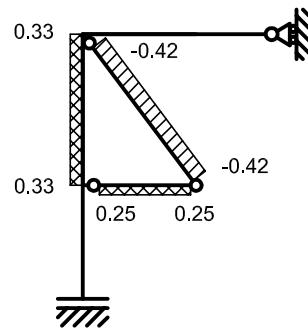
$$\sum F_y \rightarrow A_y = 10 \text{ t}$$

$$\sum F_x \rightarrow E = 0 \text{ t}$$

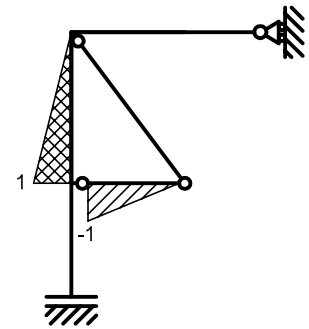
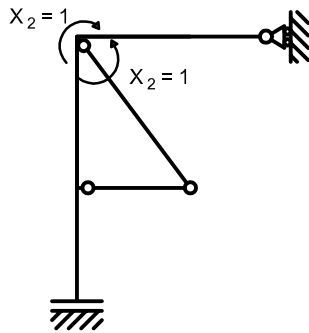
$$\sum M_A \rightarrow M_A = 32 \text{ t}$$

4. Sistema complementario E^1 :

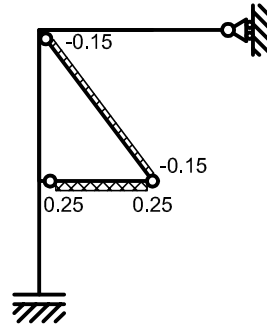
Diagramas Axiales.



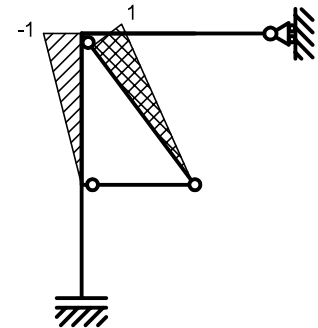
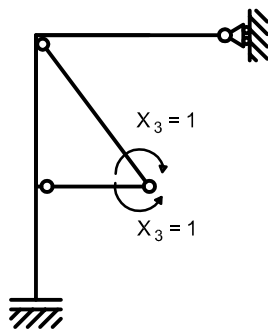
Diagramas de Momento.

Sistema complementario E^2 :

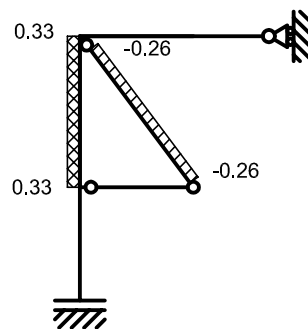
Diagramas Axiales.



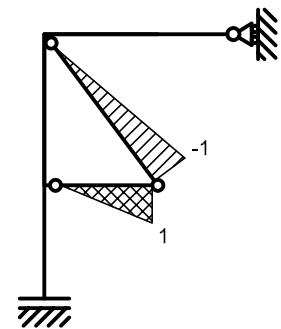
Diagramas de Momento.

Sistema complementario E^3 :

Diagramas Axiales.



Diagramas de Momento.



5. Ecuaciones de compatibilidad:

$$\begin{cases} \theta_{1r} = \theta_{10} + F_{11} \cdot X_1 + F_{12} \cdot X_2 + F_{13} \cdot X_3 \\ \theta_{2r} = \theta_{20} + F_{21} \cdot X_1 + F_{22} \cdot X_2 + F_{23} \cdot X_3 \\ \theta_{3r} = \theta_{30} + F_{31} \cdot X_1 + F_{32} \cdot X_2 + F_{33} \cdot X_3 \end{cases}$$

6. Obtención de desplazamientos del problema primario y coeficientes de flexibilidad utilizando PTVCE:

θ_{10} :

$$\begin{aligned} A &= 0,01 \text{ m}^2 \\ I &= 8,33 \cdot 10^{-6} \text{ m}^4 \end{aligned}$$

$W_{ext} = \theta_{10} \cdot 1$

$$W_{int} = \int_0^4 \frac{-38}{EI} dx + \int_0^4 \frac{-10}{AE} dx = - \frac{3\,042\,149,33}{E}$$

$W_{ext} = W_{int}$

$$\theta_{10} = - 3\,042\,149,33 / E$$

θ_{20} :

$W_{ext} = \theta_{20} \cdot 1$

$$W_{int} = \int_0^4 \frac{-38}{EI} dx + \int_0^4 \frac{-1}{EI} dx = \frac{9\,123\,649,46}{E}$$

$W_{ext} = W_{int}$

$$\theta_{20} = 9\,123\,649,56 / E$$

θ_{30} :

$$W_{ext} = \theta_{30} * 1$$

$$W_{int} = \int_0^4 \frac{-10}{AE} dx + \int_0^4 \frac{1/3}{AE} dx = -\frac{12\,000}{E}$$

$$W_{ext} = W_{int}$$

$$\theta_{30} = -12\,000 / E$$

 F_{11} :

$$W_{ext} = F_{11} * 1$$

$$W_{int} = \int_0^4 \frac{1}{EI} dx + \int_0^3 \frac{-1}{EI} dx + \int_0^4 \frac{1/3}{AE} dx + \int_0^3 \frac{1/4}{AE} dx + \int_0^5 \frac{-0,42}{AE} dx = \frac{279\,862,88}{E}$$

$$W_{ext} = W_{int}$$

$$F_{11} = 279\,862,88 / E$$

 F_{12} :

$$W_{ext} = F_{12} * 1$$

$$W_{int} = \int_0^4 \frac{1}{EI} dx + \int_0^5 \frac{-0,42}{AE} dx + \int_0^3 \frac{1/4}{AE} dx$$

$$W_{int} = - \frac{80\,381,17}{E}$$

$$W_{ext} = W_{int}$$

$$F_{12} = F_{21} = - 80\,381,17 / E$$

F₁₃:

$$W_{ext} = F_{13} * 1$$

$$W_{int} = \int_0^3 \frac{-1}{EI} dx + \int_0^4 \frac{1}{3EI} dx + \int_0^3 \frac{-0,42}{AE} dx + \int_0^3 \frac{-0,26}{AE} dx$$

$$W_{int} = - \frac{59\,947,01}{E}$$

$$W_{ext} = W_{int}$$

$$F_{13} = F_{31} = - 59\,947,01 / E$$

F₂₂:

$$W_{ext} = F_{22} * 1$$

$$W_{int} = \int_0^4 \frac{-1}{EI} dx + \int_0^5 \frac{-1}{EI} dx + \int_0^3 \frac{1}{4AE} dx + \int_0^5 \frac{-0,15}{AE} dx = \frac{358\,973,58}{E}$$

$$W_{ext} = W_{int}$$

$$F_{22} = 358\,973,58 / E$$

F₂₃:

$$W_{ext} = F_{23} * 1$$

$$W_{int} = \int_0^5 \frac{-1}{EI} dx + \int_0^5 \frac{-0,15}{AE} dx + \int_0^5 \frac{-0,26}{AE} dx = \frac{99\,659,81}{E}$$

$$W_{ext} = W_{int}$$

$$F_{23} = F_{32} = 99\,659,81 / E$$

F_{33} :

$$W_{ext} = F_{33} \cdot 1$$

$$\begin{aligned}
 W_{int} = & \int_0^3 \frac{1}{EI} dx + \int_0^5 \frac{-1}{EI} dx + \int_0^4 \frac{1/3}{AE} dx \\
 & + \int_0^5 \frac{-0,26}{AE} dx = \frac{319\,405,73}{E}
 \end{aligned}$$

$W_{ext} = W_{int}$
 $F_{33} = 319\,405,73 / E$

7. Solución de las ecuaciones de compatibilidad:

$$\begin{cases}
 0 = -3\,042\,149,33 + 279\,862,88 \cdot X_1 - 80\,381,17 \cdot X_2 - 59\,947,01 \cdot X_3 \\
 0 = 9\,123\,649,46 - 80\,381,17 \cdot X_1 + 358\,973,58 \cdot X_2 + 99\,659,86 \cdot X_3 \\
 0 = -12\,000 - 59\,947,01 \cdot X_1 + 99\,659,86 \cdot X_2 + 319\,405,73 \cdot X_3
 \end{cases}$$

$$X_1 = 5,17 \text{ t}\cdot\text{m} \quad X_2 = -26,87 \text{ t}\cdot\text{m} \quad X_3 = 9,39 \text{ t}\cdot\text{m}$$

Matriz de flexibilidad:

$$F = \begin{bmatrix} 279\,862,88 & -80\,381,17 & -59\,947,01 \\ -80\,381,17 & 358\,973,58 & 99\,659,86 \\ -59\,947,01 & 99\,659,86 & 319\,405,73 \end{bmatrix} \frac{1}{E}$$

Como no existen asentamientos en la estructura, se pueden calcular los desplazamientos del problema primario y coeficientes de flexibilidad en función al módulo de elasticidad.

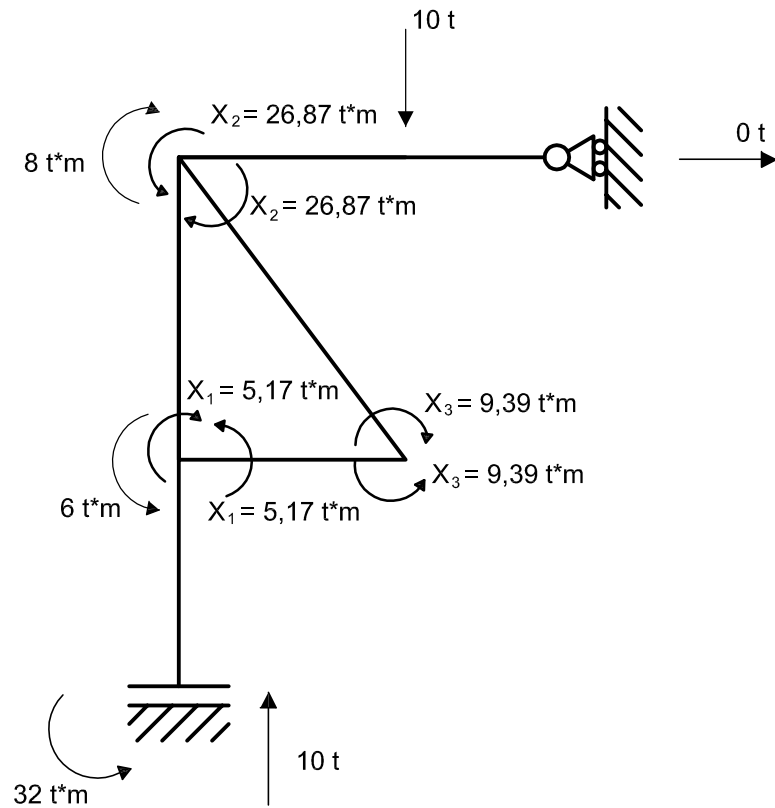
8. Sustitución de redundantes y cálculo de reacciones:

Reacciones:

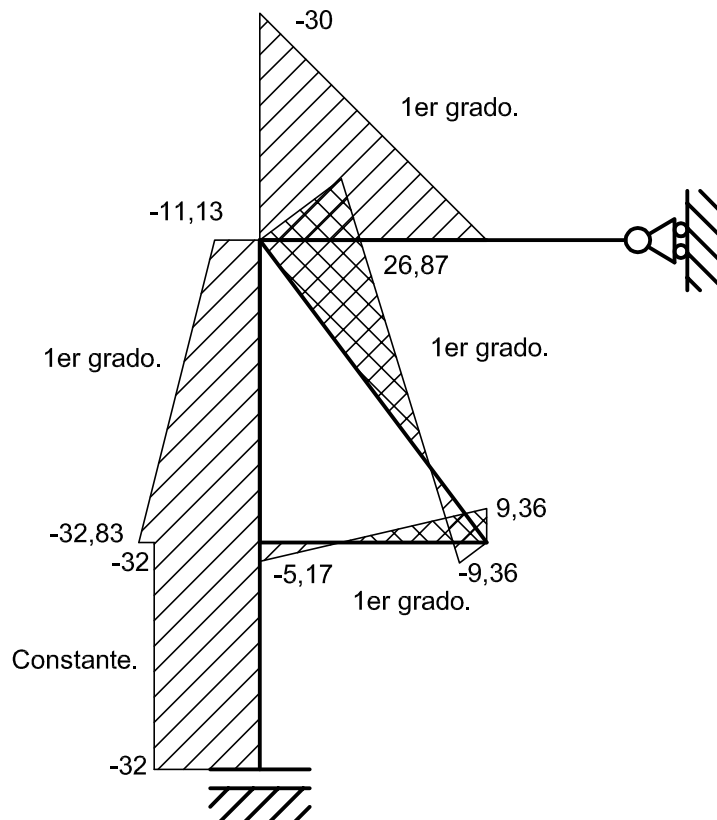
$$\sum F_y \rightarrow A_y = 10 \text{ t}$$

$$\sum F_x \rightarrow E = 0 \text{ t}$$

$$\sum M_A \rightarrow M_A = 32 \text{ t}$$



9. Diagrama de momento real:



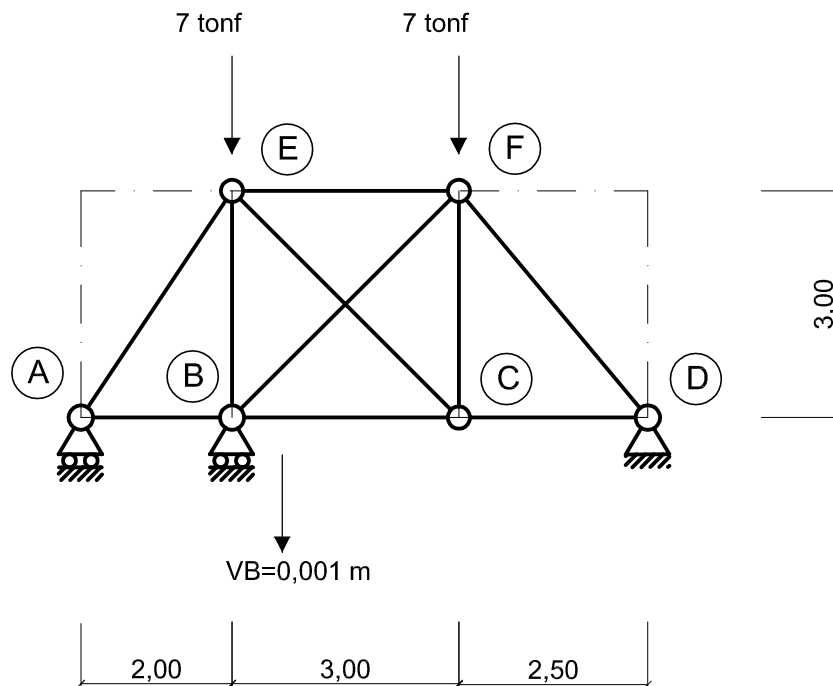
EJERCICIO 5.

Para la siguiente armadura, usando el Método de las Fuerzas, determinar el diagrama axial.

Datos del sistema estructural:

$$E = 2,1 \cdot 10^6 \text{ kgf/cm}^2$$

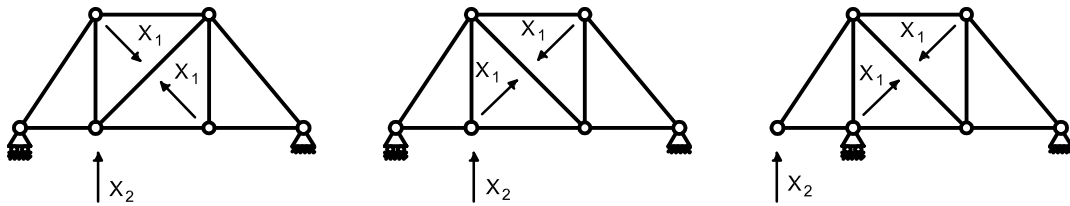
$$A = 2,8 \text{ cm}^2$$

**SOLUCIÓN:**

1. Clasificación estática de la estructura:

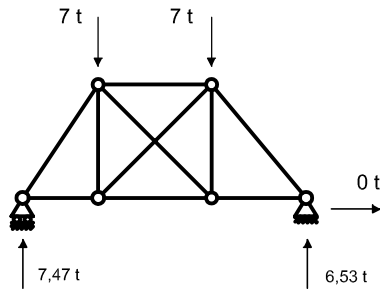
$$GL = 3(2) - (2+6) = -2 \rightarrow GH = 2$$

2. Sistemas primarios potenciales: Se presentan 3 posibles grupos de redundantes.

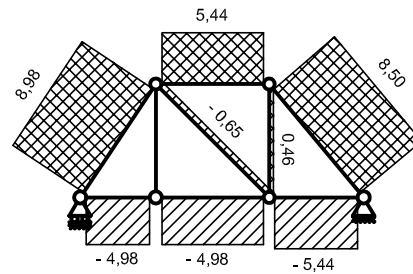


Se selecciona para desarrollar el ejercicio la opción C.

3. Sistema primario E⁰:



Diagramas de Momento.



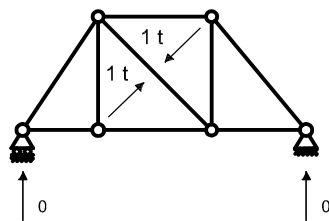
Reacciones:

$$\begin{aligned}\sum M_D &\rightarrow A_Y = 7,47 \text{ t} \\ \sum F_Y &\rightarrow D_Y = 6,53 \text{ t} \\ \sum F_X &\rightarrow D_X = 0 \text{ t}\end{aligned}$$

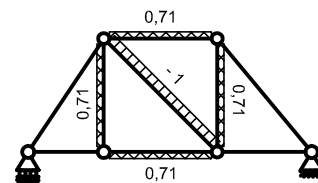
$$\begin{aligned}\text{Nodo A: } \sum F_Y &\rightarrow AE = -8,98 \text{ t} \\ \sum F_X &\rightarrow AB = 4,98 \text{ t} \\ \text{Nodo D: } \sum F_Y &\rightarrow DF = -8,50 \text{ t} \\ \sum F_X &\rightarrow DC = 5,44 \text{ t} \\ \text{Nodo B: } \sum F_X &\rightarrow BC = 4,98 \text{ t} \\ \sum F_Y &\rightarrow BE = 0 \text{ t}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Nodo C: } \sum F_X &\rightarrow CE = 0,65 \text{ t} \\ \sum F_Y &\rightarrow CF = -0,46 \text{ t} \\ \text{Nodo E: } \sum F_X &\rightarrow EF = -5,44 \text{ t}\end{aligned}$$

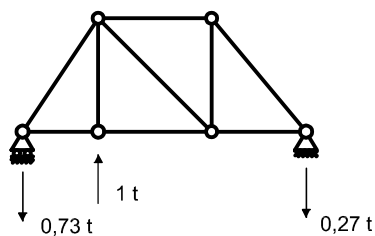
4. Sistema complementario E¹:



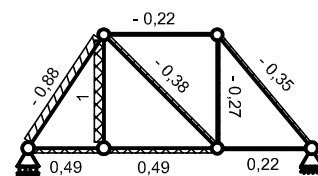
Diagramas de Momento.



Sistema complementario E²:



Diagramas de Momento.



5. Ecuaciones de compatibilidad:

$$\begin{cases} \Delta_{1r} = \Delta_{10} + F_{11} * X_1 + F_{12} * X_2 \\ \Delta_{2r} = \Delta_{20} + F_{21} * X_1 + F_{22} * X_2 \end{cases}$$

6. Obtención de desplazamientos del problema primario y coeficientes de flexibilidad utilizando PTVCE:

 Δ_{10} :

$$W_{ext} = \Delta_{10} * 1 \rightarrow W_{ext} = \Delta_{10}$$

$$W_{int} = \int_0^3 \frac{0,71}{AE} dx + \int_0^3 \frac{-4,98}{AE} dx + \int_0^3 \frac{0,71}{AE} dx + \int_0^3 \frac{0,46}{AE} dx + \int_0^3 \frac{0,71}{AE} dx + \int_0^3 \frac{5,44}{AE} dx$$

$$+ \int_0^{4,24} \frac{-1}{AE} dx + \int_0^{4,24} \frac{-0,65}{AE} dx = \frac{4,72}{AE}$$

$W_{ext} = W_{int}$
 $\Delta_{10} = 4,72/AE$
 $\Delta_{10} = 4,72/AE$

 Δ_{20} :

$$W_{ext} = \Delta_{20} * 1 \rightarrow W_{ext} = \Delta_{20}$$

$$W_{int} = \int_0^3 \frac{0,49}{AE} dx + \int_0^3 \frac{-4,98}{AE} dx + \int_0^3 \frac{0,27}{AE} dx + \int_0^3 \frac{0,46}{AE} dx + \int_0^3 \frac{-0,12}{AE} dx + \int_0^3 \frac{5,44}{AE} dx$$

$$+ \int_0^{3,61} \frac{-0,88}{AE} dx + \int_0^{3,61} \frac{8,98}{AE} dx + \int_0^2 \frac{0,49}{AE} dx + \int_0^2 \frac{-4,98}{AE} dx + \int_0^{4,24} \frac{-0,38}{AE} dx + \int_0^{4,24} \frac{-0,65}{AE} dx$$

$$+ \int_0^{2,5} \frac{0,22}{AE} dx + \int_0^{3,91} \frac{-0,35}{AE} dx + \int_0^{8,5} \frac{8,5}{AE} dx = \frac{-57,52}{AE}$$

Wext = Wint

$\Delta_{20} = -57,52/AE$

$\Delta_{20} = -57,52/AE$

F₁₁:

Wext = F₁₁*1

$$\text{Wint} = 4 \int_0^3 \frac{0,71}{AE} dx + \int_0^{4,24} \frac{-1}{AE} dx = \frac{10,29}{AE}$$

Wext = Wint

F₁₁ = 10,29/AE

F₁₁ = 10,29/AE

F₁₂:

Wext = F₁₂*1

$$\begin{aligned} \text{Wint} = & \int_0^3 \frac{0,71}{AE} dx + \int_0^3 \frac{0,49}{AE} dx + \int_0^3 \frac{0,71}{AE} dx + \int_0^3 \frac{-0,22}{AE} dx \\ & + \int_0^3 \frac{0,71}{AE} dx + \int_0^4 \frac{1}{AE} dx + \int_0^{4,29} \frac{-1}{AE} dx + \int_0^3 \frac{-0,38}{AE} dx = \frac{4,89}{AE} \end{aligned}$$

Wext = Wint

F₁₂ = 4,89/AE

F₁₂ = F₂₁ = 4,89/AE

F₂₂:

Wext = F₂₂*1

$$\text{Wint} = \int_0^3 \frac{0,49}{AE} dx + \int_0^3 \frac{0,49}{AE} dx + \int_0^3 \frac{0,27}{AE} dx + \int_0^3 \frac{0,27}{AE} dx + \int_0^3 \frac{-0,22}{AE} dx + \int_0^3 \frac{-0,22}{AE} dx$$

$$\begin{aligned}
 & + \int_0^3 \frac{1}{AE} dx + \int_0^{4,24} \frac{-0,38}{AE} dx + \int_0^{3,61} \frac{-0,88}{AE} dx \\
 & + \int_0^2 \frac{0,49}{AE} dx + \int_0^{2,5} \frac{0,22}{AE} dx + \int_0^{3,91} \frac{-0,35}{AE} dx
 \end{aligned}$$

$$W_{int} = \frac{9,46}{AE}$$

$$W_{ext} = W_{int}$$

$$F_{22} = 9,46/AE$$

7. Solución de las ecuaciones de compatibilidad:

$$\begin{cases}
 0 = 4,72 + 10,29 \cdot X_1 + 4,89 \cdot X_2 \\
 -5,88 = -57,52 + 4,89 \cdot X_1 + 9,49 \cdot X_2
 \end{cases}$$

$$X_1 = -4,03 \text{ kgf} \quad X_2 = 7,52 \text{ kgf}$$

Matriz de flexibilidad:

$$F = \begin{bmatrix} 10,29 & 4,89 \\ 4,89 & 9,49 \end{bmatrix}$$

8. Sustitución de redundantes y cálculo de reacciones:

Reacciones:

$$\sum M_D \rightarrow A_Y = 1,95 \text{ t}$$

$$\sum F_Y \rightarrow D_Y = 4,53 \text{ t}$$

$$\sum F_X \rightarrow D_X = 0 \text{ t}$$

$$\text{Nodo A: } \sum F_Y \rightarrow AE = -2,34 \text{ t}$$

$$\sum F_X \rightarrow AB = 1,30 \text{ t}$$

$$\text{Nodo D: } \sum F_Y \rightarrow DF = -5,90 \text{ t}$$

$$\sum F_X \rightarrow DC = 3,78 \text{ t}$$

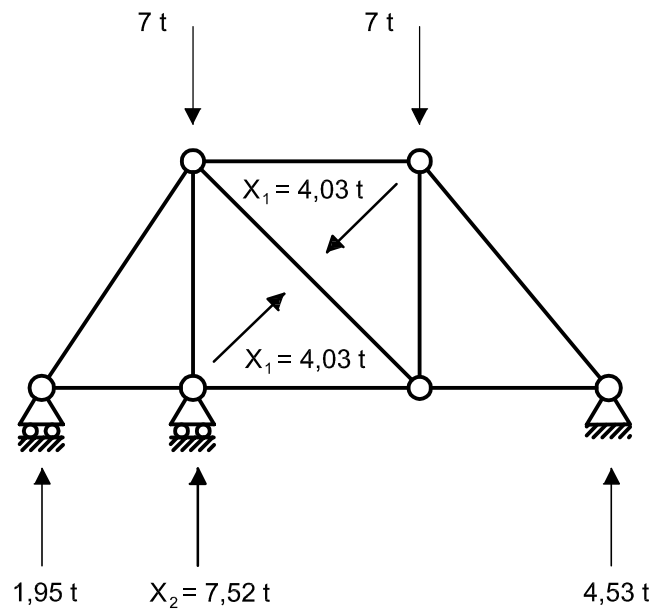
$$\text{Nodo B: } \sum F_X \rightarrow BC = 4,15 \text{ t}$$

$$\sum F_Y \rightarrow BE = -4,67 \text{ t}$$

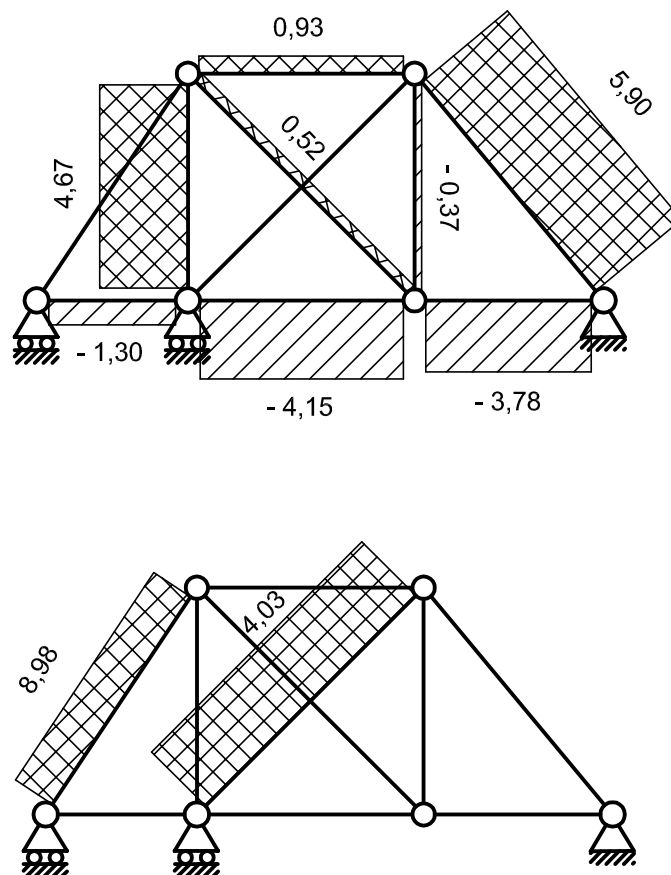
$$\text{Nodo C: } \sum F_X \rightarrow CE = -0,52 \text{ t}$$

$$\sum F_Y \rightarrow CF = 0,37 \text{ t}$$

$$\text{Nodo E: } \sum F_X \rightarrow EF = -0,93 \text{ t}$$



9. Diagrama axial real:



REFERENCIAS.

CERRALOZA, M. (2007). El método de los elementos finitos para ingeniería y ciencias aplicadas: Teoría y programas. Universidad Central de Venezuela. Caracas, Venezuela.

MCCORMAC, J. (2010). Análisis de Estructuras, Método Clásico y Matricial. Cuarta edición. Alfaomega Grupo Editor, México.