

UNIVERSIDAD DE CARABOBO
FACULTAD DE CIENCIAS ECONOMICAS Y SOCIALES
CICLO BASICO
CAMPUS LA MORITA

**ERRORES DE LOS ESTUDIANTES DE INTRODUCCIÓN A LA
MATEMÁTICA: UN ESTUDIO CON FUNCIONES REALES**
**Trabajo Presentado como Requisito Parcial para Optar a
la Categoría de Profesor Asociado en el Escalafón Docente**

Autora: Edelci Sánchez Rodríguez

Maracay, Mayo de 2008

INDICE GENERAL

	pp
DEDICATORIA.....	i
RECONOCIMIENTO.....	ii
LISTA DE CUADROS	iii
LISTA DE FIGURAS.....	iv
RESUMEN.....	vi
INTRODUCCIÓN.....	1
CAPITULO	
I. EL PROBLEMA.....	5
Planteamiento del Problema.....	5
Objetivo General.....	9
Objetivos Específicos.....	9
Justificación o Importancia de la Investigación.....	10
II. ELEMENTOS TEÓRICOS QUE SUSTENTAN LA INVESTIGACIÓN	12
Antecedentes Preliminares de la Investigación.....	12
Fundamentos Teóricos Referenciales.....	17
Dificultades en el Aprendizaje de las Matemáticas.....	22
Dificultades Asociadas a la Complejidad de los Objetos Matemáticos.....	23
Dificultades Asociadas a los Procesos de Pensamiento Matemático.....	26
Dificultades Asociadas a los Procesos de Enseñanza.....	28
Dificultades Asociadas al Desarrollo Cognitivo de los Alumnos.....	28
Dificultades Asociadas a las Actividades Afectivas y Emocionales.....	29
Obstáculos en el Aprendizaje de las Matemáticas.....	30
Tipologías de Errores.....	33
Modelo de Astolfi.....	34
Tipología de Errores de Booth.....	36
Tipología de Errores de Brousseau.....	37

Modelo de Davis.....	37
Clasificación de los errores según Radatz.....	38
Tipología de errores según Movshovitz-Hadar, Zalavsky e Inbar.....	39
Clasificación de los Errores según Torre.....	40
Errores en el Aprendizaje de la Matemática según Soccas.....	40
La Persistencia y Sistematización del Error.....	41
La Temática del Estudio y su Ubicación en el Campo del Conocimiento.....	43
III. ABORDAJE METODOLÓGICO.....	46
Identificación de la Perspectiva Paradigmática.....	46
Tipo de Estudio.....	49
El Método de Investigación.....	50
Recolección de la Información.....	52
Sujetos de la Investigación y Nivel de objetividad de la Investigación.....	53
Metodología.....	54
Fases del Estudio.....	54
Procedimiento de Análisis.....	57
IV. ANÁLISIS E INTERPRETACIÓN DE LOS RESULTADOS.....	59
Relativos a la Técnica de los Grupos Focales.....	59
Un inventario de situaciones erróneas encontradas.....	75
V. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES.....	109
Conclusiones.....	109
Recomendaciones.....	114
REFERENCIAS.....	117
ANEXOS.....	120
A. Sistema Fólder: Hoja de Registro.....	121
B. Transcripción de los encuentros de los grupos focales.....	122
C. Algunos ejemplos de errores encontrados en el estudio de las funciones reales.....	158

DEDICATORIA

Dedico este esfuerzo a mis amados hijos, a quienes este trabajo significó una serie de sacrificios...

A mis queridos estudiantes, quienes han sido motivo de inspiración en la elección del tema y quienes han hecho de mí el docente que estoy siendo cada día...

A mis apreciados colegas, mis homólogos, a aquellos que con mística, esmero y tesón, al igual que yo, transitan por el sendero en la búsqueda de la luz...

Y a todos los que ejercen la hermosa profesión docente, a aquellos que piensen en el error como una oportunidad de crecimiento, en su tratamiento didáctico como una estrategia de innovación...

RECONOCIMIENTO

A Dios, omnipresencia absoluta e infinita que guía espiritualmente mis pasos...

A la Universidad de Carabobo, casa que vence las sombras, por haberme acogido en su seno y apoyarme en mi formación y crecimiento tanto personal y profesional, básico para el desarrollo de esta investigación...

A su Consejo de Desarrollo Científico y Humanístico por avalar y apoyar este estudio...

A su Facultad de Ciencias Económicas y Sociales...infinitas gracias...

A su Dirección del Ciclo Básico, Campus La Morita, personal docente y administrativo, por su incondicional apoyo y consideración...

A la Unidad de Investigación del Ciclo Básico, Campus La Morita, en la presencia de los Drs. José Ortiz y Ligia Sánchez por su estímulo, paciencia y acertadas observaciones...

A la Profa. Angélica Sánchez de Martínez por sus oportunas aportaciones metodológicas y su incesante estímulo para hacer de este trabajo una realidad...infinitas gracias hermana...

A la Br. Rossana Pacheco por su incondicional apoyo en la documentación y transcripción de este informe...

A todos mi eterno agradecimiento...

LISTA DE CUADROS

CUADRO N°	Pp
1. Cuadro resumen de status sobre el error según modelos pedagógicos.....	20
2. Aspectos subjetivos de los estudiantes asociados a los errores (AS1).....	61
3. Aspectos subjetivos de los estudiantes asociados a los errores (AS2).....	63
4. Percepciones de los estudiantes sobre la matemática (PM1).....	65
5. Percepciones de de los estudiantes sobre la matemática (PM2).....	66

LISTA DE FIGURAS

FIG. N°	Pp
1. Situación 1.....	76
2. Situación 2.....	77
3. Situación 3.	78
4. Situación 4.	79
5. Situación 5.	81
6. Situación 6.	82
7. Situación 7.	83
8. Situación 8.	84
9. Situación 9.	85
10. Situación 10.	86
11. Situación 11.	88
12. Situación 12.	89
13. Situación 13.	91
14. Situación 14.	92
15. Situación 15.	93
16. Situación 16.	94
17. Situación 17.	94
18. Situación 18.	95
19. Situación 19.	96
20. Situación 20.	96
21. Situación 21.	97
22. Situación 22.	98
23. Situación 23.	98
24. Situación 24.	100
25. Situación 24.....	101
26. Situación 24.	102
27. Situación 25.....	102
28. Situación 26.	103

29. Situación 26.	104
30. Situación 27.	105
31. Situación 27.	106
32. Situación 27.	107
33. Situación 27.	108

FACULTAD DE CIENCIAS ECONOMICAS Y SOCIALES
CICLO BASICO
CAMPUS LA MORITA

ERRORES DE LOS ESTUDIANTES DE INTRODUCCIÓN A LA
MATEMÁTICA: UN ESTUDIO CON FUNCIONES REALES

Trabajo presentado como requisito parcial para optar a
la categoría de profesor asociado en el escalafón docente

Autora: Edelci Sánchez Rodríguez
Fecha: Febrero de 2008

RESUMEN

El presente trabajo se realizó en la Facultad de Ciencias Económicas y Sociales (FACES), Campus La Morita de la Universidad de Carabobo, Venezuela. Tuvo como objetivo general analizar los errores sistemáticos que presentan los estudiantes de la asignatura Introducción a la Matemática en el estudio de las funciones reales, desde el espacio de interacción didáctica. La referida asignatura se cursa en el primer semestre de las carreras de Administración Comercial, Contaduría Pública, Economía y Relaciones Industriales. La metodología de la investigación es de naturaleza cualitativa. Se consideraron los estudiantes de la sección 32 de la asignatura, para los cuales la investigadora es docente; dentro de éstos seleccionaron intencionalmente, además, diez (10) sujetos que se estudiaron a fondo. Se empleó como técnica primaria para recolectar la información, la observación participante y los grupos focales, con sus respectivos instrumentos como lo son el registro de observaciones o notas de campo y el guión de preguntas abiertas, complementadas con grabaciones de audio, tomadas in situ. Para el logro del objetivo se identificaron, describieron y categorizaron los errores sistemáticos encontrados a la luz de las tipologías de Astolfi, Booth, Brousseau, Davis, Radatz, Movshovitz-Hadar, Zalavsky e Inbar, De la Torre y Socas; así como también se identificaron las percepciones de los sujetos sobre los contenidos matemáticos, inmersos en el tema, susceptibles al error por parte de los estudiantes y los aspectos subjetivos asociados estos errores. Se concluyó entre otros aspectos, que los errores suscitados se corresponden con las diferentes tipologías contrastadas, concentrándose éstos en torno a los errores debidos al lenguaje y en la categoría pertinente a los errores producidos por un aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos incluidos en las categorías antes señaladas. Los sujetos manifestaron aprensión en relación a los errores, manifestándose una carga emocional negativa, que no permite apreciar el valor didáctico que estos errores encierran.

Palabras claves: errores, errores en matemática, tipologías de errores, análisis de errores.

(..) "Son unas criaturas fantásticas, los números. ¿Sabes?, en el fondo no hay números normales. Cada uno de ellos tienen sus propios rasgos, sus propios secretos. Nunca acaba uno de conocerlos.

La serpiente de nueves tras el cero y la coma, por ejemplo, que no termina nunca y sin embargo es prácticamente lo mismo que un simple uno"

Hans Magnus Erzenberger

INTRODUCCIÓN

Tradicionalmente el error ha sido percibido por la humanidad como un hecho punible, un resultado sancionable, como lo cuestiona Torre (2000): “comportamiento o acto indeseable del que ni es posible sacar nada positivo”. En este sentido, bajo la perspectiva conductista, éste debe ser eliminado antes de que se manifieste por las consecuencias perniciosas y de fijación que el mismo produce.

No obstante, desde la óptica constructiva y didáctica del error, el interés no se centra en el error en si mismo, sino en la reflexión sobre estos desaciertos, lo que induce a un aprendizaje mas profundo y significativo.

En el campo del conocimiento científico son prolíferas las sustentaciones sobre el carecer constructivo del error. Epistemólogos notables como Kart Popper enfatizan en este valor del error. Una de tales sustentaciones expresa que “los errores pueden existir ocultos al conocimiento de todos, incluso en nuestras teorías mejor comprobadas; así, la tarea específica del científico es buscar tales errores. Por lo tanto tenemos que cambiar nuestra actitud hacia nuestros errores. Es aquí donde hay que empezar nuestra reforma práctica de la ética... el nuevo principio básico es que para evitar equivocarnos debemos aprender de nuestros errores” (Popper citado por Torre 2000).

En este sentido, el error es un concepto inmerso bajo el paradigma sociocognitivo de la educación, legitimado mediante las diversas reformas educativas en variados países y sustentada por eminentes pedagogos y psicólogos como Dewey, Piaget, Bruner, Ausubel, Novak, Vigotsky entre otros, en los que se evidencia un enfoque de orientación cognitiva o sociocognitiva.

Especialmente, en el campo del aprendizaje de la matemática, el tema de los errores se constituye, hoy por hoy, en un tema que ocupa la atención de un significativo grupo de docentes, investigaciones e instituciones a nivel mundial; evidencia de ello lo muestran los variados estudios llevados a cabo en países como Estados Unidos, Alemania, Rusia, España, Colombia y Venezuela.

En este trabajo, se plantea el potencial constructivo y didáctico del error, en contraste con su tradicional enfoque de carácter punible o sancionador. En tal

sentido ha resultado de interés hacer un estudio para analizar los errores sistemáticos que presentan los estudiantes de la asignatura Introducción a la Matemática en el estudio de las funciones reales.

La investigación que al respecto se desarrolló es de naturaleza cualitativa, empleando el método etnográfico, ya que se ha analizado y descrito el comportamiento particular de los errores que se presentan en el aprendizaje de las funciones reales en la asignatura.

Se empleó como técnica primaria para recolectar la información la observación participante y la técnica de los grupos focales. Con sus respectivos instrumentos como lo son el registro de observaciones o notas de campo tomadas in situ y el guión de preguntas abiertas, complementadas con las grabaciones de audio realizadas también in situ.

Los errores detectados fueron analizados a la luz de diversas tipologías existentes en la asignatura consultada y se encontró que, en líneas generales, éstos se encuentran inmersos en las correspondientes categorías referidas anteriormente, siendo que en su mayoría se encuentran en las tipologías de Davis, Radatz y Movshovitz en lo que respecta a los *Errores debido el uso del lenguaje*. Así mismo, encontró que la categoría denominada "*Aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos*" abarcó una cantidad considerable de errores, mostrando, una vez más, la necesidad de promover aprendizajes significativos en la signatura y de la correspondiente nivelación y/o sincerización del perfil del estudiante que ingresa a la facultad de Ciencias Económicas y Sociales de la Universidad de Carabobo.

Por su parte los sujetos evidenciaron a través del discurso el impacto emocional que los errores producen en ellos, lo cual induce a que éstos tengan una predisposición negativa hacia el aprendizaje reflexivo y significativo que se puede generar, producto del análisis de estos errores. Se evidenció además, una tendencia a minimizar, desvalorizar o soslayar los errores en detrimento del reconocimiento necesario para su empleo didáctico.

No obstante, se encontró que los estudiantes reconocen que el origen de los errores es de índole diversa, entre los que señalan poca concentración de la

actividad o dispersión, la impulsividad, la mala base de bachillerato, la poca visualización de los problemas y el poco tiempo del que disponen para desarrollar los ejercicios o problemas en las clases y/o evaluaciones.

Por otra parte, en lo que respecta a las percepciones de los estudiantes en relación al tema de funciones y los contenidos susceptibles de errores, se encontró en líneas generales que éstos, además del uso que le han visto al tema por sus aplicaciones a la economía, no le encuentran vinculación con lo cotidiano; por lo que perciben poca utilidad o escaso valor de uso práctico a lo aprendido. Todo ello en un contexto donde perciben, en general, a la asignatura como una materia que deberían aprobar, como un requisito u obligación.

Todo lo anteriormente referido se encuentra ampliado y organizado sistemáticamente para estructurar el presente informe mediante los siguientes capítulos:

Capítulo I: que consta del planteamiento del problema, las interrogantes de la investigación, los objetivos de la investigación, así como su justificación o importancia.

Capítulo II: que contiene los elementos teóricos que sustentan la investigación, en el que se muestra el estado del arte en la relación del tema de los errores en el aprendizaje de la matemática, pasando por la concepción filosófica del error. Así como también, se abordan los antecedentes de la investigación encontrados hasta la fecha. Se incluyen además las diferentes tipologías de errores, antecedidas por las nociones de obstáculos y dificultades, así como también las dificultades propias del aprendizaje de la matemática.

Capítulo III: que comprende el abordaje metodológico de la investigación, los sujetos de la investigación, así como también las fases que comprende la investigación.

Capítulo IV: donde se exponen de manera organizada los hallazgos encontrados bajo la denominación de análisis e interpretación de los resultados de la investigación. Estos hallazgos se muestran a través de dos vertientes; la primera de ellas está referida a los resultados que se derivan de los encuentros de los grupos focales y la segunda, producto de los diferentes errores, expuestos

mediante figuras escaneadas de la ejecución directa y original realizada por los actores, obtenidas por la observación directa del trabajo realizado por los estudiantes en clases.

Capítulo V: que comprende las conclusiones y recomendaciones derivadas de proceso y esfuerzo investigativo.

CAPITULO I

EL PROBLEMA

Planteamiento del Problema

*"Si pudiera volver a la juventud, cometería todos aquellos errores
de nuevo, sólo que más temprano"*
Tallulah Banhead

El proceso didáctico del aprendizaje de la matemática es una actividad que mantiene el interés de educadores e investigadores en el área, constituyéndose en un tema que no ha perdido vigencia en la historia de la humanidad. A lo largo de ella el hombre ha practicado diversos procedimientos y métodos, estrategias y herramientas con la finalidad de alcanzar en forma efectiva tanto la enseñanza como el aprendizaje de esta ciencia. En este sentido, en la actualidad, están cobrando vigencia las investigaciones con fines didácticos sobre el tema de los errores y dificultades en la enseñanza y aprendizaje de la matemática, dado que el error forma parte del proceso de construcción del conocimiento y que siendo manejado de manera óptima por el docente y por el estudiante, puede llegar a constituirse en germen motivador de procesos de cambios y transformaciones en el alumno, convirtiéndose así en un elemento constructivo e innovador del aprendizaje de la misma.

Según Astolfi (2003), el tratamiento de los errores en el aprendizaje está siendo considerado de interés a los fines didácticos, dado que más allá de ser concebidos como simples fallas, han pasado a ser elementos necesarios para el aprendizaje. A juicio del autor, "el error parece ser una buena forma de analizar modelos pedagógicos: es la piedra de toque de una mayor profesionalización del trabajo del enseñante" (p.8).

Investigaciones diversas sobre este tema han analizado el estado del error desde distintas ópticas pedagógico-didácticas, abordando diferentes y variados

marcos teóricos orientadores de estos estudios, que clasifican o tipifican los errores según sus causas, orígenes, y que proponen estrategias de abordaje para su tratamiento en el aula. La búsqueda de significados en los errores que surgen de los estudiantes se ha convertido en un tema de discusión que puede hacer brillar ideas sobre la enseñanza y el aprendizaje, dado que éstos pudieran no ser meras equivocaciones producidas al azar, sino que de alguna u otra manera han de ser evidencias del nivel de conocimientos de los estudiantes, entre otras, y de su análisis dependerá el reconocimiento de la diversidad cognitiva, de interés para cualquier docente.

En este orden de ideas, Socas (1997), ha destacado que la naturaleza abstracta de la matemática produce en los estudiantes dificultades de aprendizaje, dificultades éstas de índole variada; algunas de ellas proceden del macrosistema educativo, no obstante, considera que en líneas generales, su origen circula alrededor del microsistema educativo (alumnos, materia, profesor e institución). El estudio de las dificultades en el aprendizaje de esta asignatura puede enfocarse desde distintas ópticas, partiendo desde el desarrollo cognitivo de los estudiantes hacia el currículo de matemática y hasta los propios métodos de enseñanza. Estas dificultades se concretan en las prácticas educativas a manera de obstáculos, manifestándose en los estudiantes en forma de errores, los cuales son considerados como evidencia de la presencia de esquemas inadecuados de aspectos cognitivos en el alumno y no meramente de una falta simple y específica de conocimientos.

Todos los aspectos expuestos anteriormente permiten, en el devenir de la actividad humana, concebir la vinculación de los errores al proceso de enseñanza y aprendizaje; no obstante, a pesar de la existencia de la famosa máxima que reza que de humanos es errar y de sabios rectificar, se ha relacionado al error, con aspectos negativos de la acción humana. Esta óptica en la concepción del error, se ha constituido, en el área de la matemática, en elemento motivador de aspectos negativos o desmotivacionales que generan conflictos emocionales, tanto en el ejercicio de la acción docente como en los propios estudiantes, caso específico el

de aquellas asignaturas vinculadas a ésta, que constituyen básicamente los primeros niveles en el árbol curricular de las carreras universitarias.

La experiencia en los procesos de admisión para los aspirantes a ingreso en la Facultad de Ciencias Económicas y Sociales de la Universidad de Carabobo, FACES-UC, ha mostrado una inquietante realidad en cuanto a los puntajes obtenidos por estos aspirantes como resultado de la aplicación de la sub-prueba de habilidad numérica. Esta realidad revela que un considerable número de bachilleres que ingresan a la UC no poseen los conocimientos previos que se necesitan para desarrollar con éxito las asignaturas que requieren del pensamiento lógico-formal. Estos resultados podrían constituirse en predictores del éxito académico de los estudiantes en la asignatura Introducción a la Matemática, IM, asignatura ésta que viene a formar el primer eslabón en la cadena de materias en el pensum de estudios de las carreras de FACES-UC, con las características antes escritas.

La asignatura Introducción a la Matemática de la Facultad de Ciencias Económicas y Sociales de la Universidad de Carabobo, está ubicada en el primer nivel de las carreras de Administración Comercial y Contaduría Pública, así como también en la de Economía y la de Relaciones Industriales. La misma está contemplada en el pensum bajo un enfoque nivelador e instrumental, de acuerdo a las características propias de la estructura académica a la cual está adscrita, el Ciclo Básico (CB) de la Facultad, y está sustentada en el empleo del razonamiento formal y sistemático para el abordaje de los problemas. En tal sentido, comprende un contenido, cuyo tránsito hace el recorrido desde el campo de la lógica proposicional, atravesando por la teoría de conjuntos, elementos propios de álgebra y de la aritmética hasta llegar al estudio de las funciones bajo el enfoque de cualquier curso de pre-cálculo. Como es de observarse, no se cuenta en la Facultad con una asignatura que bien pudiera llamarse en el medio como matemática cero, ni de cursos propedéuticos intensivos, seriamente estructurados, que permitan la nivelación de los ingresantes; no obstante, se han implementado actividades para la correspondiente nivelación de contenidos previos o de

conductas iniciales y de pre-requisitos, actividades éstas que no han sido lo suficientemente evaluadas o simplemente cuya evaluación se desconoce.

A pesar de la aplicación de las diferentes estrategias niveladoras, la experiencia ha mostrado que los estudiantes cursantes de esta asignatura presentan serias dificultades y obstáculos que se evidencian o se manifiestan en forma de errores. Aún cuando se vivencian experiencias gratificantes en cuanto el proceso de enseñanza y aprendizaje de la lógica proposicional, los excelentes resultados obtenidos en las correspondientes evaluaciones y la propia experiencia en el aula así lo refleja, existe una marcada diferencia en los resultados obtenidos en las restantes unidades programáticas de la asignatura, específicamente en la unidad correspondiente al estudio de las funciones. Esta diferencia es producida, tal vez, en primer lugar, por el mal empleo de los contenidos algebraicos y aritméticos de la educación media, diversificada y profesional, y por otra, quizá por la resistencia que oponen los estudiantes en el empleo adecuado del razonamiento lógico y del manejo del lenguaje simbólico, entre otras.

Tal vez todo ello sea la causa de que los docentes tengan que recurrir al empleo de una gran parte del tiempo de clase, así como de consultas, para hacer hincapié en estos aspectos, considerados como puntos álgidos de la asignatura, teniendo que revisar de manera constante y recurrente aquellos tópicos donde los estudiantes comúnmente presentan errores, en detrimento del tratamiento de nuevos temas y nuevos conceptos. En la generalidad de los casos, las estrategias y el tiempo que el docente dedique al tratamiento de los errores que presenten los estudiantes en la asignatura a objeto de generar las experiencias de aprendizaje significativo, dependerán, probablemente, de la naturaleza u origen de estos errores.

Con base a lo planteado anteriormente surgen las siguientes interrogantes:

¿Cuáles son los errores sistemáticos que presentan los estudiantes de la asignatura Introducción a la Matemática de FACES-UC, campus La Morita, en el estudio de las funciones reales?

¿Cuáles son las características de tales errores?

¿En cuál o cuáles de las tipologías existentes estos se ubican?

¿Cuáles contenidos matemáticos, relacionados con el estudio de las funciones reales en IM, son susceptibles al error?

¿Qué aspectos subjetivos de los estudiantes están asociados a estos errores?

Estas interrogantes de la investigación orientan la finalidad del estudio y permiten hacer el planteamiento de los siguientes objetivos de la investigación que a continuación se describen.

Objetivo General

A los fines de darle respuesta a las interrogantes que se formularon con anterioridad, se plantea como objetivo general de esta investigación el siguiente:

Analizar los errores sistemáticos que presentan los estudiantes de la asignatura Introducción a la Matemática en el estudio de las funciones reales, desde el espacio de interacción didáctica.

Objetivos Específicos

Para el logro del objetivo general de la presente investigación se han precisado los siguientes objetivos específicos:

1. Identificar los errores sistemáticos que presentan los estudiantes en la asignatura Introducción a la Matemática de FACES-UC campus La Morita, en el estudio de las funciones reales.
2. Describir los errores sistemáticos que presentan los estudiantes en la asignatura Introducción a la Matemática de FACES-UC campus La Morita, en el estudio de las funciones reales.
3. Categorizar los errores sistemáticos que presentan los estudiantes en la asignatura Introducción a la Matemática de FACES-UC campus La Morita, en el estudio de las funciones reales.

4. Precisar la percepción de los estudiantes de los contenidos matemáticos inmersos en el estudio de las funciones reales, susceptibles al error por parte de los estudiantes.
5. Detectar aspectos subjetivos de los estudiantes asociados a los errores.

Justificación o Importancia de la Investigación

El análisis de la naturaleza de los errores más frecuentes en los estudiantes de matemática constituye un factor de interés didáctico de actualidad entre la comunidad académica, que incluye no solamente a docentes y a estudiantes en el área, sino también a la institución que los soporta o en la que ambos se sostienen. Se asume el hecho de que los errores no son casuales, dado que éstos están basados en conocimientos y experiencias previas que pueden tener diferentes factores que los originan, estos factores pueden estar asociados a dificultades de carácter didáctico, epistemológico, cognitivo o actitudinales (emocionales).

Si se observan los errores a través de la óptica de que éstos promueven resultados no deseados en los alumnos y partiendo del hecho de que en la experiencia tradicional el docente realiza la corrección pertinente de los mismos a través, quizá, de la realización de la operación correspondiente (según sea el caso), puede darse la situación de que el problema persista y se presente de nuevo en otras oportunidades, dado que es poco probable que con la sola revisión de este “hacer” del alumno ocurran transformaciones imperecederas en el tiempo.

Se hace entonces imperativo profundizar en la naturaleza del problema, ahondando en el sujeto, en el propio actor, transitar más allá del simple “hacer” del mismo y promover un aprendizaje que permita al estudiante “darse cuenta” de cuáles factores pudieran estar asociados a esos resultados no satisfactorios y que permitan describir la forma particular de ser de cada estudiante, poniendo en evidencia características tales como sus valores, paradigmas, rasgos actitudinales, creencias, inquietudes, historia particular, cultura, intereses, etc... Esta profundización conllevaría a lo que algunos autores como Heller (1998), Senge

(1992), Echeverría (1998), entre otros, han denominado aprendizaje transformacional, de segundo orden o de lazo doble.

Develar esta posible vinculación de los errores con las formas particulares de ser, con las características propias de los individuos que los manifiestan, podría arrojar luces sobre otras maneras de tratamiento o de abordaje de estos errores, en donde el papel del docente no se remita a una simple tarea de capacitación y en su lugar, se traduzca en una verdadera formación humana de sus estudiantes, que conlleve a la transformación de modelos mentales y cambios en la percepción e interpretación de los fenómenos. Ello redundaría no solamente en beneficio del rendimiento académico de los estudiantes en la asignatura, sino también en otras de igual naturaleza y, por ende, en beneficio de la propia institución, toda vez que se propiciaría el decrecimiento en la cantidad de aplazados en el área, con sus correspondientes consecuencias.

El tratamiento de los errores de los estudiantes pudiera propiciar un clima favorable para apreciar con una mirada distinta la actitud o estado emocional de los docentes frente a los errores de los estudiantes, revisar las emociones o la actitud del estudiante frente a sus propios errores y la de estos estudiantes frente al juicio que hacen sus docentes sobre estos errores.

Todo lo antes expuesto evidencia que la presente investigación se justifica entonces por su relevancia y utilidad social, además de considerarse el problema a investigar como un problema de actualidad que ha persistido en el tiempo, de interés común en la comunidad académica, cuyos beneficiarios se extienden desde los propios estudiantes, hasta los docentes y la propia institución. Ello aunado al hecho de que los recursos, tanto materiales como humanos y de tiempo, están al alcance del investigador, ratifica la factibilidad y la pertinencia de emprender el esfuerzo investigativo que aquí se ha planteado.

CAPITULO II

ELEMENTOS TEÓRICOS QUE SUSTENTAN LA INVESTIGACIÓN

Antecedentes de la Investigación

*"Para qué repetir los errores antiguos habiendo
tantos errores nuevos por cometer"
Bertrand Russel*

A objeto de conocer el estado del arte sobre el área de interés de la presente investigación, como lo es la naturaleza de los errores de los estudiantes en Introducción a la Matemática, se hizo necesario realizar la correspondiente revisión documental para identificar, aproximadamente, cuántos y cuáles estudios se han realizado en torno a la temática a objeto de precisar los enfoques tanto teóricos como metodológicos, así como también los resultados derivados de éstos.

Se parte del trabajo realizado por Franchi y Hernández (2004), investigación que denominaron “Tipología de Errores en el Área de Geometría Plana”. Para las autoras el error representa una oportunidad de aprendizaje en el que el alumno ha de tomar decisiones, luego de percatarse de su llegada infructuosa a la solución correcta del problema planteado, y elegir una alternativa entre, intentar otro camino, otras acciones para superar su error o por el contrario, continuar en el error que lo que lo seguirá llevando al fracaso.

Las autoras establecieron como objetivo de la investigación, la propuesta de una tipología de errores en el aprendizaje del área de la geometría para identificar y clasificar estos errores mostrados por los estudiantes durante su aprendizaje. Diseñaron una investigación de tipo cualitativa empleando la técnica de la observación participante y como instrumento la hoja de campo. Registraron sus observaciones durante dos semestres académicos consecutivos con alumnos de Geometría de la Facultad de Ingeniería de la Universidad del Zulia, contrastando los errores encontrados con cinco tipologías existentes (Brousseau, Socas,

Movschovitz, Radatz y Astolfi). Para su propuesta consideraron la Teoría de las Situaciones Didácticas de Brousseau y las tipologías antes referidas. Obtuvieron como resultado una nueva tipología compuesta por ocho categorías dentro de las cuales dos de ellas constituyen una novedad. Recomiendan utilizarla como herramienta para facilitar estrategias adecuadas para superar errores en ésta área.

Garrote, Hidalgo y Blanco (2004) presentaron un trabajo de investigación titulado “Dificultades en el aprendizaje de las desigualdades e inecuaciones”, dentro del programa del Doctorado ofrecido por el Departamento de Didáctica de las Ciencias Experimentales y de las Matemáticas de la Universidad de Extremadura (España), en el que se desarrolla una línea de investigación sobre errores y dificultades en la enseñanza/ aprendizaje de las Matemáticas. Esta investigación fue realizada en estudiantes de primero de bachillerato con la finalidad de describir y analizar algunos de sus errores y dificultades en el aprendizaje de las inecuaciones y así mejorar el proceso de enseñanza aprendizaje de las mismas.

Los investigadores partieron de trabajos desarrollados sobre dificultades y errores observados en relación a las habilidades algebraicas. Por la naturaleza descriptiva de su investigación, los autores emplearon instrumentos propios de la metodología cualitativa como lo son los cuestionarios y la entrevista. Fundamentaron teóricamente su estudio en las ideas de Brousseau (1997) y Palarea (1999) quienes hacen un recorrido por las dificultades y errores de los alumnos en el aprendizaje de las matemáticas en general y del álgebra específicamente; exponen una tipología de los errores, clasificándolos en cinco categorías.

Como resultado de su investigación mostraron algunos errores y dificultades detectadas mediante la aplicación del cuestionario e intentaron un acercamiento a las causas de los mismos. No se plantearon hacer un análisis estadístico exhaustivo de los datos recogidos. Entre el cuerpo de conclusiones a los que arribaron se citan: la comprensión deficiente en el concepto de inecuación, no establecimiento de diferencias significativas entre este concepto y la ecuación, los alumnos manifiestan dificultades al leer de izquierda a derecha o de derecha a

izquierda, es decir, dificultades para reconocer la equivalencia de las expresiones $x > 1$ y $1 < x$; evidenciaron serias dificultades en la traducción de un enunciado verbal a una expresión algebraica y en la interpretación de la solución de una inecuación. También develaron la ausencia de significados, representado éste uno de los principales problemas que se plantean en el trabajo con inecuaciones.

Por otra parte, Camacho (1999) realizó un estudio cuyo propósito consistió en analizar los errores más comunes que presentan los estudiantes en el uso del signo de la igualdad en un contexto algebraico a nivel de 9º grado de la Educación Básica y 2º año del Ciclo Diversificado. La investigación llevada a cabo fue de naturaleza diagnóstica-descriptiva, dado que se determinaron y analizaron los errores antes referidos. La autora combinó los elementos del enfoque cualitativo con el cuantitativo para presentar los resultados del estudio. Elaboró y aplicó un instrumento considerando las fuentes de errores detectados en una muestra conformada por 156 estudiantes del 9º grado de Educación Básica E.B. y 138 del 2º año del Ciclo Diversificado C.D., tanto de planteles públicos como privados ubicados en el área urbana de Barquisimeto, Venezuela, durante el año escolar 1998-1999. Además, entrevistó una muestra de alumnos, seleccionada entre los que emergieron los errores más frecuentes, para analizar las posibles causas que originaron tales errores.

Los resultados ponen de manifiesto que tanto los estudiantes de 9º como los del 2º año del C.D. evidenciaron dificultades en el significado de la igualdad en las ecuaciones, la aplicación de las propiedades simétrica y transitiva de la igualdad, la resolución de ecuaciones lineales, reflejando aquí deficiencia de conocimientos en la transposición de términos, adición de términos semejantes y en las propiedades de la igualdad.

En este mismo orden de ideas, Espinoza (1995), por su parte, desarrolló una investigación con estudiantes de primero y segundo semestre de diversas carreras en la Universidad Antonio Nariño de Bogotá, Colombia, que denominó “Un tratamiento del error en que incurre el estudiante en su trabajo de matemáticas”; mediante la cual se planteó como objetivo diseñar, experimentar y proponer una estrategia didáctica a partir de estrategias metacognitivas, a través de las cuales se

identifica el error, se establecen las causas y se realiza un proceso de fijación de precauciones. La investigación se realizó mediante un diseño experimental con dos grupos: uno experimental y uno control. Los registros de los resultados obtenidos por los docentes involucrados y por el investigador han mostrado una reducción del error en un 78%.

Por otra parte, se ha encontrado en Rico (1995), una fuente importante de información en relación a las investigaciones realizadas, a nivel internacional, en torno a la temática en cuestión, dado que éste reporta tres rasgos característicos de los antecedentes encontrados hasta la década de los 80 en el estudio sobre los errores de los estudiantes en el proceso del aprendizaje de la matemática:

- Estudio sobre errores concentrados en torno al área de la aritmética (el conocimiento numérico).
- USA muestra un desarrollo teórico continuo desde comienzos del siglo en el análisis de los errores en educación matemática, mientras que en los países europeos ha sido más esporádico e interrumpido hasta las fechas recientes.
- Pluralidad de aproximaciones teóricas e intentos de explicaciones sobre las causas de los errores cometidos.

Sostiene además que los estudios en Alemania tienen influencia de tres escuelas en psicología: la psicoanalítica, la Gestalt y la psicología del pensamiento; en este sentido destaca a:

- Weiner (1922): Fundador de la investigación didáctica orientada al estudio de los errores. Intentó establecer patrones y agrupó los errores en cinco categorías: familiares, persistentes, por similitud, mixtos y emocionales.
- Seseman (1931) con su tipología en aritmética: mecánicos, asociativos y funcionales.
- Kiessling (1925): con su denominada “tendencia al error” (predisposición a errar) y con el tratamiento del error.
- Rose (1928): con una clasificación de las causas: Inatención, ignorancia de las reglas, confusión de conceptos e incapacidad para reconocer los datos de un problema.

- Schlaak (1968): resoluciones de problemas
- Gluck (1971): errores de cálculo (cambios de operación, aproximación aditiva, resultados parciales, el primer dígito correcto y errores de transcripción).
- Pippig (1987): deficiencia en cálculo aritmético y su interpretación bajo una perspectiva psicológica

Por otra parte Rico (op.cit), refiere que en la URSS se consolida un campo de investigación sobre educación matemática a comienzos de los años 60. Tiene difusión por la traducción hecha por Kilpatrick y Wiszurp editados en 1967. Se señalan:

- Kuzmistkaya: con sus cuatro causas de error (insuficiencia de la memoria a corto plazo, comprensión insuficiente de las condiciones del problema, ausencia de reglas verbales y uso incorrecto de las cuatro operaciones básicas).
- Menchinskaya: destacó la regularidad de los errores de los estudiantes en educación matemática con cuatro causas potenciales de error (realización incorrecta en una operación, comprensión conceptual cualitativamente insuficiente, errores mecánicos por distracción o pérdidas de interés, por la aplicación de reglas o algoritmos inadecuados).

De acuerdo con Rico, en USA las investigaciones se inician con el trabajo de Buswell y Judd (1925) que recoge 31 estudios realizados hasta la fecha. Prosiguen:

- Thorndike (1917): psicología de la aritmética.
- Buswell (1925): identificó errores tipo en las cuatro operaciones aritméticas básicas ampliando un método de análisis mas complejo que incluye además de los ejercicios escritos, observaciones en el aula y entrevistas para el diagnostico.
- Brueckner y otros (1935) orientaron sus investigaciones en base de a cinco objetivos:
 1. Listar todas las técnicas potencialmente erróneas.

2. Determinar la distribución de frecuencias de éstas en agrupamientos por edades.
3. Analizar dificultades especiales (división y operaciones con el cero).
4. Determinar la persistencia de estas técnicas.
5. Clasificar y agrupar los errores.

En lo que se refiere al caso de España, Rico (op.cit) refiere que de acuerdo a lo reseñado por la revista Bordón (1953), se encontraron el trabajo realizados por Villarejo y Fernández Huerta, en el que se ofrece una reflexión considerable para determinar los errores mas usuales en aritméticas escolar y quienes sentaron bases para la enseñanza correctiva en aritmética, fundamentada en métodos de diagnósticos producidos por los errores detectados.

En el caso de Venezuela son escasos los estudios encontrados hasta la presente fecha, probablemente los existentes no han sido lo suficientemente divulgados, y se desconocen, hasta el presente las líneas de investigación orientadas al respecto.

Fundamentos Teóricos Referenciales

"Errare humanum est"
Adagio latín

El error del latín *errorem* se traduce, para la real academia de la lengua española, como un concepto equivocado o juicio falso, también representa una acción desacertada o equivocada, una **“conducta reprochable particularmente desde un punto de vista religioso: vivir en el error...”**. Tal vez desde allí es probable que se tenga la concepción del error como algo censurable en contradicción con la máxima que sirve de apertura a esta sección cuya traducción muestra que errar es humano.

Vinculado a esta idea y haciendo una fuerte critica, Astolfi (2003), analiza el status que tienen los errores en la escuela, señala que éstos son comúnmente vistos como “fallos” del aprendizaje,... “de un sistema que no ha funcionado

correctamente, fallos que hay que castigar”(p.10). Esta postura, a juicio del autor posee varias lecturas en las que refiere, en primer lugar, lo que denomina “el síndrome del rotulador rojo” mediante el cual, el docente al percibir el error, refleja la conducta de tachar, subrayar, registrar la falta en el cuaderno, lejos de detenerse a pensar cuál será la utilidad de este hallazgo desde el punto de vista didáctico. En segundo lugar, refiere el hecho de que los errores originan dudas sobre sí mismos en los docentes y originan en éstos reflexiones acerca de la ineficacia del proceso de enseñanza sobre lo impartido, produciéndose en ellos un malestar y resentimiento por el surgimiento de esos errores en el alumno, los cuales se estarían tratando de evitar a lo largo de todo el proceso.

La tercera percepción a la que alude el autor se refiere al “vértigo”, para referir una cierta adversión ante la idea de “sumergirse” en la mente de los alumnos, y permitirse entrar en el campo de las explicaciones de los estudiantes, por cuanto se presentan serias dificultades en la conjugación de la lógica del saber y la lógica de los alumnos.

Estas ideas tal vez hayan sido influencia del pensamiento de Gaston Bachelard, toda vez que de las páginas de *La formación del espíritu científico* se recoge que:

Los profesores, sobre todo los de Ciencias, no comprenden que los alumnos no comprenden. Se imaginan que la mente sigue los mismos pasos que una lección; que los alumnos pueden hacerse con una cierta “cultura” si los profesores les imparten la misma clase una y otra vez o que pueden llegar a entender una demostración y se les repite paso a paso. (Bachelard 2004, p20).

El tratamiento del error en el aula de clase puede evidenciar el modelo pedagógico adoptado en la misma. Así, al considerar el error como “fallos” se pudiera pensar en el modelo *transmisivo*, o también pudiera tratarse del modelo *comportamentalista*, donde el error adquiere un aspecto distinto, modelo éste diseñado a partir de la psicología conductista basado en la transferencia del condicionamiento animal al hombre. Bajo esta concepción es posible el aprendizaje (tanto en el niño como en el animal), por complejo que sea, mediante la fragmentación de esa complejidad en etapas elementales, con reforzamientos positivos por cada aprehensión parcial, mediante recompensas y no castigos.

La crítica que tradicionalmente se le hace al conductismo se reduce al hecho de este no provee garantías de que las conductas externas se correspondan con los procesos mentales (internos) y además, a juicio de Astolfi, que este permite evitar los errores, dada la propia fragmentación del aprendizaje, no teniendo en cuenta la autonomía intelectual del estudiante. Desde esta óptica, el error mantiene su status negativo puesto que los esfuerzos están orientados hacia la evasión de que estos aparezcan.

En los modelos constructivistas, por el contrario, el error se observa desde una perspectiva distinta, éste es aceptado con un status mucho más positivo y, aún cuando el fin sea erradicarlos en el producto presentado por el alumno, se admite su presencia, e incluso se provocan, a objeto de darles un mejor tratamiento y derivar de allí el correspondiente aprendizaje. Dentro de este modelo, el error no es concebido como faltas censurables, ni tampoco fallos que lamentar del proceso, sino que son vistos como síntomas interesantes de los obstáculos con los que se enfrenta el pensamiento de los alumnos; se muestra un particular interés por estos errores, los cuales son considerados como piezas centrales del proceso de aprendizaje y se emplean como indicadores de los progresos conceptuales que se están obteniendo, los cuales no son tomados en cuenta cuando se corrige con el “rotulador rojo”, referido anteriormente. Lejos de actuar con censura, lo que se busca es profundizar en la lógica del error y obtener mejor partido para incidir positivamente en el aprendizaje.

Bajo esta concepción, se obvia lo que Piaget (1978) denominó el “n'importe quisme” (noimportaquismo), dado que, por absurdas que se aprecien las respuestas de los estudiantes, se trata de encontrarles sentido, de dar con las operaciones mentales de las que ellas son evidencias. El error se concibe como un indicador de las tareas intelectuales que los alumnos van ejecutando y los obstáculos enfrentados en esta ejecución. Al respecto, Sanner (citado en Astolfi, 2003) argumenta que “En pedagogía, si se quiere que la noción de obstáculo epistemológico sea operativa, no basta con reconocer el derecho al error, sino que debe emprender el camino al conocimiento real del error” (p.18); en otras palabras, el obstáculo implica acción y reflexión con los medios que se disponga y

el aprendizaje se deriva de la construcción de medios que se adecúen más efectivamente a la situación.

A modo de resumen, sobre los distintos enfoques bajo los cuales ha sido concebido el error, el cuadro siguiente sintetiza las ideas principales:

CUADRO 1. RESUMEN DE STATUS SOBRE EL ERROR SEGÚN MODELOS PEDAGÓGICOS

	FALTA	FALLO DE PROGRAMA	OBSTACULO
ESTATUS	Se niega el error “fallo” disparate” “noimportaquimo”		El error positivo (postulado del sentido)
ORIGEN DEL ERROR	Responsabilidad del alumno que debe impedirlo	Defecto de la programación	Dificultad objetiva en la apropiación del contenido enseñado
MODO DE TRATARLO	Evaluación a posteriori para castigarlo	Tratamiento a priori para prevenirlo	Trabajo in situ para tratarlo
MODELO PEDAGOGICO DE REFERENCIA	Modelo transmisivo	Modelo conductista	Modelo constructivista

Nota: Tomado de Astolfi (2003, p. 27).

Pero, ¿Qué procesos mentales conducen al error?: En la búsqueda de respuestas a la interrogante anterior resulta de interés mostrar las ideas de Bachelard (2004) y de Piaget (1978) relacionadas con el tema.

Bachelard (2004) sostenía que el conocimiento se construye en contra de uno anterior, destruyendo conocimientos mal adquiridos, sobreponiéndose a lo que en la mente funciona como obstáculo. Para él:

No hay verdad sin error rectificado...Al volver sobre un pasado de errores, se encuentra la verdad en un arrepentimiento intelectual verdadero...Una psicología sobre la aptitud objetiva es una historia de nuestros errores personales...El error es reconocido a posteriori. Es el pasado de la razón que vuelve sobre sí misma para juzgarse... (Bachelard, 2004).

En este sentido, en su concepto, en el estudio del conocimiento errado ha de conocerse de antemano y en profundidad lo que, específicamente se está aprendiendo con tanto esfuerzo, dado que la mente sólo puede “*formarse reformándose*”.

El pensamiento de Bachelard, bajo la óptica de Fabre (1995), estuvo centralizado en el término “*obstáculo epistemológico*”. Etimológicamente, el término *obstáculo* representa un obstáculo para la comprensión del propio término; éste tiene su raíz en la palabra latina *obstare* que define *lo que se tiene adelante, lo que impide continuar el sendero*. Paradójicamente, en primer lugar, los obstáculos epistemológicos son propios del interior de la mente del sujeto, no constituyen aquello contra lo que el pensamiento se ve impedido, sino que forman parte del pensamiento mismo, en las palabras, en el inconsciente, en la experiencia diaria.... “El error es, pues, constitutivo del propio acto de conocer, y, según otra fase, es la “sombra que arroja la razón”. Desde esta perspectiva, es imposible pretender un aprendizaje sin obstáculos.

Además de la interioridad del obstáculo, Fabre (op.cit) refiere otras cinco características de los “obstáculos epistemológicos” de Bachelard: **la facilidad** de los mismos para aludir que, antes de ser una dificultad, el obstáculo se constituye en una facilidad de la mente por lo que alega que debemos desconfiar más de nuestras “filias” que de nuestras “fobias”; **la positividad** del obstáculo, puesto que éste no representa el vacío de la ignorancia, sino una expresión de conocimiento como cualquier otra. Aquí Bachelard destaca lo preponderante de las afirmaciones primitivas o “conocimientos” previos que no llegan a erradicarse a pesar de la nueva experiencia. El obstáculo se presenta como una red de errores contruidos, tenaces, solidarios que se resisten a la refutación.

Otras características aludidas por Fabre son la **ambigüedad** del obstáculo; lo **polimórfico** del mismo en tanto que no se limitan al dominio de lo racional, sino que pueden estar inmersos en el plano afectivo, emotivo, mítico y, finalmente, la **recurrencia del obstáculo**, en el sentido de que los errores solamente se reconocen después de ser cometidos o de manifestarse luego de que los obstáculos son vencidos. Todas estas características propician comprender, más fácilmente, el por qué de la resistencia de los obstáculos. Para Bachelard, el obstáculo no es simplemente sinónimo de dificultad, ni representa en todos los casos un bloqueo del sistema de pensamiento, dado que puede verse como una cierta comodidad intelectual. Según Astolfi(2003), el error constituye un indicador de la lentitud, regresiones y analogías que caracterizan toda idea que se está construyendo, como testimonio del funcionamiento propio de nuestro de nuestro cerebro; es la señal inequívoca de una auténtica actividad intelectual que evita la “reproducción estereotipada y guiada con estrechez, como acompañante de una verdadera elaboración mental” (ob.cit., p. 40).

En tanto que Bachelard refería el hecho de los errores asociándolos a la presencia de obstáculos que, bien se resisten o se tienden a obviar; Piaget (1978) por su parte, sostenía la presencia de los “esquemas” como instrumentos de conocimiento mediante los cuales el sujeto comprende e interpreta la realidad exterior.

Dificultades en el Aprendizaje de las Matemáticas

*"La casualidad, la observación y el ensayo
constituyen la base de muchos inventos".
E. de Bono*

Tal como se ha expresado con antelación a lo largo de este trabajo, el análisis de las dificultades y obstáculos que presentan los estudiantes en la producción del conocimiento matemático permite favorecer una enseñanza adecuada y propende un mejor aprendizaje de la matemática. Focalizar la atención docente a esas

dificultades podría propiciar el análisis y estudio de los errores dado que, los errores son la manifestación externa de estas dificultades.

En este sentido, Socas (1997), quien probablemente sea el autor que más ha trabajado en la materia, señala que, asumiendo el hecho de que la naturaleza de las dificultades en el aprendizaje de la matemática puede ser de origen diverso, éstas pueden agruparse en cinco categorías relacionadas con:

- La complejidad de los objetos matemáticos.
- Los procesos de pensamiento matemático.
- Los procesos de enseñanza desarrollados para el aprendizaje de las matemáticas.
- Los procesos de desarrollo cognitivo de los alumnos.
- Las actitudes afectivas y emocionales hacia las matemáticas.

Dificultades Asociadas a la Complejidad de los Objetos Matemáticos

Socas (ob.cit.) establece la presencia de distintos conflictos en torno a la comprensión y comunicación de los objetos matemáticos, derivados de la yuxtaposición del lenguaje simbólico, propio de esta ciencia, con el lenguaje habitual, dado que con el uso éste último se pueden expresar significados a pesar de que se cometan abusos morfosintácticos; este significado puede expresarse por alusión o asociación o por ubicación en el contexto.

No obstante, el lenguaje simbólico de la matemática requiere de una mayor precisión y rigurosidad y su significado será o no comunicado dependiendo de la interpretación exacta de sus signos. Análogamente, se presentan conflictos en el lenguaje matemático producido por vocablos comunes empleados en el lenguaje coloquial, para señalar otros significados tales como *raíz*, *potencia*, *producto*, *sistema*, *función*, *semejante*, *congruente*, *natural*, *entero*, etc. Cabe considerar, por otra parte, que dentro del campo de la matemática se encuentran términos específicos de esta ciencia que suelen producir considerables dificultades entre los estudiantes, tales como: *inyectiva*, *algebraico*, *hipotenusa*, *cateto*, *múltiplo*, etc.,

los cuales han de ser poco familiares y sólo se les presentan a los estudiantes en su aprendizaje matemático.

Otro aspecto interesante, generador de dificultades, que la experiencia de la investigadora ha evidenciado en su trayectoria en la docencia, que data en más de 30 años de dedicación a la misma, lo representa el hecho del sentido u orientación usual de la lectura (izquierda a derecha) en contraste con el hecho de que el lenguaje simbólico puede ser leído y/o interpretado en sentido contrario, ejemplo de ello pueden encontrarse expresiones $2 \geq x, -1 < x \leq 3, f \circ g$ (la función compuesta de g con f), $(xb + 3b) = (x + 3)b$ entre otros.

En este orden de ideas, Socas (ob.cit.) expresa que otros aspectos del lenguaje matemático que contrastan con la lengua común son aquellos que hacen referencia a los signos, fuente de confusiones entre los estudiantes, lo cual es propio de la naturaleza abstracta de los conceptos matemáticos, que ha de entenderse como un proceso de abstracción por etapas. Así, este autor señala que “para situar mejor las dificultades y los errores que se originan en el desarrollo de los signos matemáticos, conviene analizar los diferentes estadios de desarrollo que se dan en los sistemas cognitivos, tomando como ejemplo algunos objetos matemáticos” (p.128).

Esto es ilustrado por éste autor en el proceso de aprendizaje de los exponentes; aquí se distinguen tres etapas distintas:

Primer estadio denominado *semiótico*, en el que los estudiantes adquieren nuevos significados mediante el significado de signos antiguos previamente conocidos (conjunto de operaciones de sumar, restar, multiplicar y dividir):

Así se define, por ejemplo:

$$3^4 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \quad \text{Ó} \quad a^4 = a \times a \times a \times a$$

Segundo estadio, denominado *estructural*, por cuanto el sistema antiguo organiza la estructura del nuevo sistema, mediante proceso como:

$$\begin{array}{ccc} 3^4 & \times & 3^3 = ? = 3^7 \\ \Downarrow & & \Downarrow \quad \Uparrow \\ (3 \times 3 \times 3 \times 3) \times (3 \times 3 \times 3) \Rightarrow & & \end{array}$$

Así se llega al esquema general a $a^4 \times a^3 = a^{4+3} = a^7$, que simbólicamente puede ser expresado como $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$. Análogamente se obtiene el esquema para la división:

$$a^5 : a^3 = \frac{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a}{a \cdot a \cdot a} = a \cdot a = a^2,$$

que puede ser simbólicamente expresado por $a^m : a^n = a^{m-n}$, dando lugar a la ley de exponentes.

Este autor refiere que en este estadio es donde comienzan a aparecer problemas disímiles que conllevan al establecimiento de restricciones, como por ejemplo: cuando $m > n$, donde a^0 ó a^{-2} son carentes de significado o explicación en el sistema antiguo.

Así, prosigue, aparecen en este estadio auténticas dificultades cognitivas que al no poder ser explicadas por el antiguo sistema, se recurre a la “observación de regularidades y comportamientos patrones” a fin de proveerles significados; tal es el caso de:

$$3^3 = 3 \times 3 \times 3 = 27$$

$$3^2 = 3 \times 3 = 9$$

$$3^1 = 3 = 3$$

$$3^0 = 1$$

$$3^{-1} = \frac{1}{3}$$

No obstante de haberse eliminado algunas restricciones, han de seguirse presentando signos que aún no puede proveerles de significados ni siquiera con la técnica de la regularidad y de los comportamientos patrones. Expresa el autor que estos nuevos signos actúan con significados propios, con autonomía del sistema anterior, constituyendo un nuevo estadio que se denomina *autónomo*; en el ejemplo citado por el autor:

$$e^{2/5} = \sqrt[5]{e^2} \quad \text{ó} \quad e^{i\pi} = -1$$

Así se muestra que es éste el proceso de generalización de la matemática, característico de la misma, relacionado con el desarrollo de sus signos, que hace

que sistema nuevo se constituya en germen de dificultades, al presentarse signos que no pueden ser conocidos en términos del sistema antiguo.

Dificultades Asociadas a los procesos de pensamiento matemático

Estas dificultades se evidencian en la naturaleza lógica de la matemática; históricamente el aspecto deductivo formal se ha considerado una de las principales dificultades en el aprendizaje matemático. Este pensamiento lógico, deductivo formal, ha sido descuidado generalmente, de algunos programas de educación secundaria, quizá por el abandono de ciertas demostraciones formales en beneficio de una aplicación más instrumental, mecánica, de las reglas matemáticas, la cual no debe justificar este abandono, ya que el mismo representa una destreza de alto nivel, indispensable para alcanzar ciertos niveles de competencia matemática.

Socas (ob.cit.) expresa que la deducción lógica no ha de confundirse ni con la deducción formal ni con los procedimientos algorítmicos; así, el pensamiento lógico debe estar presente en todas las actividades matemáticas. Sin embargo, pareciera que con las matemáticas escolares, “la lógica” de éstas dependiera, en general, del contexto en que se enuncia. En el sentido amplio, se puede hablar de la incidencia de lo social sobre lo lógico, pero, a veces, en los problemas que se les plantean a los estudiantes el contexto elegido a veces puede ser lógicamente absurdo. Sostiene que para disminuir las dificultades de los alumnos en su aprendizaje matemático pareciera necesario potenciar el pensamiento lógico de esta ciencia y enlazar la lógica interna de la matemática con la lógica del contexto social en que el alumno está inmerso.

Como interesante ejemplo ilustrativo, muestra el siguiente: En la cotidianidad los números decimales se presentan como parejas de números enteros; así se dice: “Víctor mide un metro ochenta” y no se hace referencia el número 1,80 sino de dos enteros, 1 y 80 (dos unidades distintas, el metro y el centímetro). Esta idea del número decimal, de naturaleza social, queda archivada en la mente del alumno y pueden encontrarse errores que se justifiquen dentro de esa “lógica social”:

$1,3 < 1,28$ ya que $3 < 28$ ó $0,3 \times 0,3 = 0,9$ puesto que $0 \times 0 = 0$ y $3 \times 3 = 9$ ó también entre $1,3$ y $1,4$ no existen números por no existir números enteros entre 3 y 4 .

En este mismo orden de ideas, señala que el pensamiento matemático provoca rupturas que se convierten en dificultades en el proceso normal de construcción del saber matemático. Estas rupturas obedecen al hecho de que el conocimiento matemático procedente origina modelos implícitos para resolver ciertos problemas; siendo adecuados en unos casos pero no así en otros, da origen a dificultades para la adquisición del nuevo conocimiento. Estas dificultades no se pueden evitar, dado que forman parte natural del proceso de construcción del conocimiento matemático, sin embargo han de ser del conocimiento del profesorado para producir la correspondiente reflexión y explicación; ya que de quedarse implícitas dificultarían la incorporación del nuevo conocimiento.

Este autor, ejemplifica lo anterior con dos rupturas importantes que se dan en relación con los modos de pensamiento matemático: “El modelo aditivo crea dificultades al modelo multiplicativo y lineal y éste, a su vez, crea dificultades a otros modelos”:

En la escuela primaria se define multiplicación como:

$$a + \dots \overset{n \text{ veces}}{\dots} + a = na \quad (\text{Estadio semiótico})$$

Esta definición se muestra incapaz de dar sentido a la multiplicación con los números enteros negativos y racionales; genera una serie de dificultades puesto conduce a una ley externa:

$$x + \dots \overset{n \text{ veces}}{\dots} + x = nx, \quad x \in \mathbb{Q}, \quad n \in \mathbb{Q}$$

$$\frac{p}{q} + \dots \overset{n \text{ veces}}{\dots} + \frac{p}{q} = n \cdot \frac{p}{q}, \quad \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}, \quad n \in \mathbb{Q}$$

Pero $n \in \mathbb{Q}$ y $n \in \mathbb{Q}$ ($\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}, \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$) lo cual hace necesario que se dote de significado a la multiplicación dentro de $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$.

Socas señala que al resultar implícito el modelo lineal éste genera conflictos con otros modelos; así, por ejemplo los estudiantes suelen aplicar las propiedades de linealidad como:

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2$$

$$\sqrt{a + b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

$$\frac{1}{x + y} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$$

Se observa entonces como los modelos implícitos que derivan ciertas formas de pensamiento, se convierten en dificultades naturales imposibles de evitar, para la adquisición del saber matemático. En este sentido, los docentes han de conocer y manejar estas situaciones con el objeto de no propender en la formación de estas dificultades.

Dificultades Asociadas a los Procesos de Enseñanza.

Estas dificultades están vinculadas a los centros educativos, al currículo de matemática, las estrategias docentes y a los recursos de aprendizaje. En este sentido Socas establece que la institución escolar ha de propiciar una organización escolar que propenda la disminución de las dificultades en el aprendizaje de las matemáticas velando por los materiales curriculares, los recursos y los métodos de enseñanza.

La organización curricular en esta área puede producir diferentes dificultades en su aprendizaje; estas dificultades estarían básicamente enmarcadas por: “las habilidades necesarias para desarrollar capacidades matemáticas que definen la competencia de un alumno en matemáticas, la necesidad de contenidos anteriores, el nivel de abstracción requerido y la naturaleza lógica de las matemáticas escolares”.

Dificultades Asociadas al Desarrollo Cognitivo de los Alumnos

De acuerdo con Socas (op.cit.), conocer los procesos de aprendizaje y el desarrollo intelectual de los alumnos permite determinar el nivel de las dificultades y el quehacer estudiantil en el aprendizaje de la matemática. Este conocimiento, evidenciado en la forma de cómo estos emplean el razonamiento y

por el desarrollo específico de las tareas que éstos puedan ejecutar, constituye una valiosa información pedagógica en el diseño del material instruccional.

Las diversas teorías o enfoques sobre el desarrollo cognitivo tales como el enfoque jerárquico del aprendizaje, el evolutivo, el estructuralista, el constructivista y el procesamiento de la información entre otros, a juicio de este autor, no han tenido un efecto directo en el aula de matemáticas secundaria por diversas razones, entre las cuales se destaca que muy pocas de ellas se han ocupado de manera específica de las matemáticas.

Dificultades Asociadas a las Actividades Afectivas y Emocionales

La mayoría de las actitudes negativas están vinculadas a aspectos emocionales como la ansiedad y el miedo. Socas (op. cit.) sostiene que la ansiedad por finalizar una tarea y el miedo al fracaso o a equivocarse, generan bloqueos de origen afectivo que inciden en la actividad matemática de los alumnos.

De acuerdo con Buxton, citado por Socas (op. cit.) resulta lógico deducir que esta ansiedad y este miedo surgen como consecuencia de ciertas creencias sobre la naturaleza de las matemáticas que son transmitidas de generación en generación. Tales creencias señalan a las matemáticas como:

(...) fijas, intratables, irreales, abstractas, y no relacionadas con la realidad, un misterio accesibles a pocos, una colección de reglas y hechos que deben ser recordados, una ofensa al sentido común en algunas de las cosas que aseguran, un área en la que se harán juicios, no sólo del intelecto, sino de la valía personal y que las matemáticas son, sobre todo, cálculo. (p.135)

No en balde los aspectos afectivos han comenzado a ser objeto de variadas investigaciones en educación matemática; en este sentido, resulta de interés citar los trabajos del educador matemático McLeod citado en Gómez (2000), trabajos que datan de 1988. Gómez, como parte de su interesante investigación doctoral sobre los afectos en el aprendizaje matemático, sostiene que las dificultades que entraña, tanto aprender como enseñar la matemática, pueden tener origen en la naturaleza de esta ciencia, en el lenguaje y la notación matemática y en el modo

de aprender los alumnos. Considera pertinente “no sólo ahondar cada vez más en las exigencias cognitivas para el aprendizaje, sino, también muy especialmente, en las exigencias afectivas.”(p.28)

En otro orden de ideas, Torre (2004) expresa que el aprendizaje de la matemática presenta ciertas dificultades que son inherentes a la naturaleza de la asignatura y que sería conveniente tomar en cuenta a los fines didácticos:

1. El uso de un lenguaje específico que se aparta de la cotidianidad.
2. El razonamiento se apoya en axiomas y leyes que no siempre son comprendidos.
3. Dificultad para aplicar normas o reglas debido a la propia dificultad del lenguaje para percibir relaciones entre los elementos.
4. El empleo de incógnitas representa una novedad en el lenguaje, sin cuyo dominio no es posible resolver los problemas,
5. La secuencia lógica de los diferentes elementos de una demostración es un proceso complejo de aprendizaje que requiere de tiempo.
6. Dificultad para realizar operaciones con decimales o fracciones.

Obstáculos en el Aprendizaje de las Matemáticas

*“Más vale errar actuando que no actuar para no errar”.
Carlos Marighella*

Para llegar al análisis de los errores es preciso desentrañar las dificultades que se dan en el proceso de aprendizaje de la matemática, así como también precisar los diferentes obstáculos que puedan estar presentes o suscitarse.

La noción de obstáculo surge con las ideas del filósofo francés G. Bachelard (1938) quién introduce el concepto de *obstáculo epistemológico* en el campo de las ciencias experimentales, el cual ya ha sido mencionado con anterioridad a lo largo de este trabajo.

Bachelard, (citado en Socas, 1997), en relación a este término expresa que:

(...) Hay que plantearse el problema del conocimiento científico en términos de obstáculos. Y no se trata de considerar obstáculos externos, como la complejidad y la

fugacidad de los fenómenos, ni tampoco culpar la debilidad de los sentidos y de la mente humana, pues es, precisamente, en el acto de conocer, íntimamente, cuando surgen, como una necesidad funcional, torpezas de entendimiento y confusiones. Es ahí donde mostraremos causas de estancamiento e incluso de regresión, y donde descubriremos causas de inercia que llamaremos obstáculos epistemológicos. (p.138).

En este sentido, Bachelard (1985) destaca, entre otros, algunos tipos de obstáculos que se establecen a partir de:

- La inclinación a validar engañosas ideas intuitivas.
- La tendencia a realizar generalizaciones, muy común en los estudiantes de cursos matemáticos.

Por otra parte, específicamente en el ámbito de la didáctica de la matemática, la noción de *obstáculo* fue introducida por Guy Brousseau (1989), quien sostuvo que el error no es sólo efecto de la ignorancia, de la incertidumbre y tampoco del azar como se ha sostenido en las teorías empíricas o conductistas del aprendizaje. Para él éste constituye el efecto de un conocimiento anterior, con sus correspondientes intereses y logros, pero que ahora se revela falso, o sencillamente inadecuado. Para él “los errores de este tipo no son erráticos o imprevisibles, sino que constituyen obstáculos. Tanto en el funcionamiento del maestro como en el del alumno, el error es constitutivo del sentido del conocimiento”

Según el párrafo precedente, la noción de *obstáculo cognitivo* acentúa los siguientes aspectos:

- Se trata siempre de un conocimiento y no de una ausencia de conocimiento.
- Este conocimiento permite al alumno producir respuestas correctas en determinados problemas o situaciones.
- Este mismo conocimiento conduce a respuestas erróneas para otros problemas o situaciones. Este tipo de errores no son esporádicos sino persistentes y muy resistentes a la corrección.

Esta concepción sobre los errores de los alumnos permite pensar al obstáculo en estrecha relación con los aprendizajes por adaptación dado que son de carácter personalizado, pues son el resultado de la acción misma del alumno y por esto se presentan tan resistentes al cambio.

Guy Brousseau retoma las ideas de Bachelard en relación al término *obstáculo epistemológico*, que se suponían confinadas a las ciencias experimentales, y lo transfiere al ámbito de la Didáctica de la Matemática mediante su Teoría de las Situaciones Didácticas, desarrollada a partir de 1970 (Brousseau, 1997). Según esta teoría, el alumno aprende por medio de su adaptación a un medio que genera contradicciones, dificultades y desequilibrios, tal y como ocurre en la sociedad. El resultado de esta adaptación del alumno, es decir el conocimiento, se manifiesta a través de nuevas respuestas que evidencian el aprendizaje. En este sentido, la labor del docente consiste en organizar dicho entorno de tal manera, que la adaptación derive en el desarrollo por parte del alumno del conocimiento deseado.

En este orden de ideas y acorde a la teoría de Brousseau, el aprendizaje en matemática se adquiere a través de saltos y no de forma continua y son precisamente los obstáculos quienes se oponen a tales saltos. Los alumnos poseen unas concepciones iniciales y el propósito de la enseñanza consiste en la generación de unas concepciones resultantes, para lo cual es indispensable el desarrollo de un proceso didáctico, en cuyo diseño y control está la esencia del problema, lo cual se logra a través de situaciones o problemas que se desarrollan dentro de un contexto social, cuyas reglas (implícitas y explícitas) constituyen lo que él denomina contrato didáctico. En esta contexto se dan cita diversas situaciones didácticas y es a través de ellas que se valida la solución del problema y se construye el conocimiento personal del alumno, que puede tener carácter de herramienta o de conocimiento que debe ser retenido, en cuyo caso se hace necesaria su institucionalización dentro de un proceso de evolución hacia el conocimiento cultural (Balacheff, 1990, citado por Sierpinska, 1999).

De acuerdo con Brousseau (1997), los obstáculos se manifiestan mediante los errores, pero estos errores no son debidos al azar, sino que son reproducibles y persistentes. Además, los errores producidos por el mismo sujeto están

interconectados por una fuente común: una manera de conocer, una concepción característica, coherente si no correcta, un "conocimiento" antiguo que ha sido exitoso en todo un dominio de acciones. Estos errores no son necesariamente explicables. Ocurre que no desaparecen completamente de una sola vez; se resisten, persisten, luego reaparecen, se manifiestan mucho tiempo después de que el sujeto ha rechazado el modelo defectuoso de su sistema cognitivo consciente. El obstáculo es de la misma naturaleza del conocimiento, con objetos, relaciones, métodos de aprehensión, predicciones, con evidencias, consecuencias olvidadas, ramificaciones imprevistas, etc. Resistirá el rechazo e intentará adaptarse localmente, modificarse al menor costo, optimarse en un campo reducido, siguiendo un proceso bien conocido de acomodación.

Los obstáculos pueden ser de diverso origen, distinguiéndose según Brousseau (1997) principalmente los siguientes:

- *Obstáculos ontogenéticos*: son aquellos que provienen de las limitaciones del sujeto en un momento dado del desarrollo.
- *Obstáculos didácticos*: son aquellos que parecen depender de las decisiones del docente o del sistema educativo.
- *Obstáculos epistemológicos*: están ligados al conocimiento mismo. Se pueden encontrar en la evolución histórica de los conceptos matemáticos.

Tipologías de Errores

*"Los errores son signos de inteligencia,
la cara oculta de los audaces intelectuales."
A. Corral*

Conocer las diferentes clases de errores que presentan los estudiantes en su aprendizaje, permite al docente seleccionar las estrategias adecuadas para optimizar el mismo y facilitar la superación de estos fallos, al sustituir el conocimiento errado por el nuevo conocimiento, que ha de adquirir como consecuencia.

Así, a continuación se presentan las diferentes tipologías que se han encontrado en la compilación de los trabajos realizados por Astolfi (1997), Franchi y Hernández (2003), Beyer W (2003), Torre (2004), Davis, Radatz, Movshovitz-Hadar, Zaslavsky e Inbar citados en Kilpatrick y otros (1995).

Modelo de Astolfi (1997)

Para este autor, referido con anterioridad en el presente trabajo, resulta de interés el análisis del error de manera individual, dado que de acuerdo a la naturaleza del diagnóstico operado, las modalidades de intervención didáctica para obtenerles provecho resultan muy diversas. En este sentido distingue las siguientes categorías:

1. *“Errores debidos a la comprensión de las instrucciones de trabajo dadas en clase”*: lo cual involucra una comprensión del lenguaje propio de cada disciplina.
2. *“Errores que provienen de las costumbres escolares o de una mala interpretación de las expectativas”*: este tipo de errores tiene un papel esencial en la actividad cotidiana de la clase y de lo que se espera que el alumno realice. La clase funciona como una *“sociedad de costumbres”*, es decir, una sociedad que dispone de sus propias reglas, pero sin que éstas costumbres se hayan dictado, ni mucho menos formalizado, Balachef citado por Astolfi (1997, p.56). Muchos de los errores se derivan de las dificultades que encuentran los alumnos para comprender los aspectos implícitos de la situación. Juegan un papel importante en este tipo de errores, los obstáculos epistemológicos estudiados por Brousseau, ya referidos con anterioridad en este trabajo.
3. *“Errores que dan testimonio de las concepciones alternativas de los alumnos”*: denominadas también representaciones en relación con las diferentes nociones enseñadas; estas representaciones están estructuradas en forma subyacente por obstáculos epistemológicos, vienen a cohabitar con los saberes escolares que devienen como adquisiciones superficiales y son

movilizadas cada vez que la actividad del alumno tiende a relacionarlas con el problema o actividad.

4. *“Errores relacionados con las operaciones intelectuales implicadas”*: éstas operaciones pueden no estar al alcance o dominio de los estudiantes pero las mismas son transparentes para el docente.
5. *“Errores en los recorridos empleados o procedimientos sorprendentes”*: éstos caminos o procesos empleados por el alumno pueden ser diversos y el docente espera que éste emplee un método-tipo, no llegando a comprender su intención o procedimiento. Estos procedimientos, multiplican las ocasiones de producción de errores; no obstante, tienen más sentido en la óptica de los alumnos. Lejos de juzgar estas estrategias como erróneas, es más productivo permitir su expresión dentro del colectivo, a objeto de contrastarlas.
6. *“Errores debidos a la sobrecarga cognitiva durante el ejercicio”*: se considera de vital importancia reconocer los límites de la capacidad de trabajo; no obstante se subestima frecuentemente la carga cognitiva durante el ejercicio. Estos errores están relaciones con las implicaciones didácticas de la memoria y la capacidad limitada de información que ésta tiene.
7. *“Errores que tiene su origen en otra disciplina”*: este tipo de errores que se suscitan con frecuencia, está asociado a la transferencia entre disciplinas; tiene que ver con el uso que ha de darle el estudiante a los conceptos y contenidos aprendidos en una disciplina en el aprendizaje de otras. Estos errores se suscitan en la medida en que la transferencia de las competencias requerida parece natural, cuando en la práctica no lo es en lo absoluto, y comporta dificultades, motivo de investigaciones como las de Meirieu y Develay (1996), Jean-Francois Richard y Bernard Charlot citados por Astolfi (1997) y de controversias entre los modelos de la psicología genética (estadios de desarrollo) y la psicología cognitiva (tratamiento de la información).
8. *“Errores causados por la complejidad propia del contenido”*: complejidad que no siempre es percibida en el habitual estudio de las disciplinas ni en sus programaciones. Su análisis es típico del trabajo didáctico que comprende, en la mayoría de los casos, de una contrastación de los contenidos teóricos y

prácticos de la enseñanza, así como también los métodos y procedimientos que habitualmente se les asocian, en detrimento de las investigaciones didácticas en profundidad, de un análisis didáctico de los nudos de dificultad inmersos en los conceptos.

Tipología de Errores de Booth (1984)

Booth, citado por Engler y otros (s/f), realiza una descripción de los errores comunes suscitados en los alumnos y los atribuye a:

1. *“La naturaleza y el significado de los símbolos y las letras*: los símbolos representan la base del lenguaje matemático, son recursos que facilitan la notación y la manipulación de abstracciones. Una fuente de error la constituye la falta de reconocimiento de la naturaleza y el significado de la simbología como medio de comprensión en los procesos de operacionalización con ellos y en la interpretación de los resultados, que permiten al alumno la transferencia del conocimiento aritmético hacia el algebraico.
2. *“El objetivo de la actividad y la naturaleza de las respuestas en álgebra*: en la mayoría de los casos, los estudiantes no realizan un proceso reflexivo de aprendizaje y hacen supuestos de que en las cuestiones algebraicas se les exige una solución única y numérica.
3. *“La comprensión de la aritmética por parte de los estudiantes”*: la mayoría de los errores de los estudiantes que presentan en el álgebra, obedecen a dificultades y errores que presentan en el campo de la aritmética, reflejados a través de las dificultades en la interiorización de los conceptos.
4. *“El uso inadecuado de “fórmulas” o “reglas de procedimiento”*: en esta categoría se incluyen aquellos errores debidos al uso indiscriminado de una fórmula o regla conocida, tomada de algún prototipo o de diversas fuentes, que el alumno emplea tal cual la conoce o bien que realiza una adaptación incorrecta a una situación nueva. La mayoría de estos errores se producen entonces como falsas generalizaciones tales como mal uso de la ley

distributiva, uso de recíprocos falsos, aplicación incorrecta de la ley cancelativa, entre otras.

Tipología de Errores de Brousseau (2001)

Para este autor, citado por Franchi y Hernández (2004), los docentes suelen clasificar los errores como:

1. *“Errores a nivel práctico”*: este tipo de error incluye los que se suscitan del cálculo de operaciones o algoritmos.
2. *“Errores en la tarea”*: estos errores son asumidos por el docente como derivados por descuido del estudiante.
3. *“Errores de tecnología”*: errores donde el docente critica la elección de la técnica empleada por el estudiante.
4. *“Errores de técnica”*: se manifiestan cuando el profesor juzga la ejecución de un modo operativo conocido.
5. *“Errores de nivel teórico”*: se aluden los errores cuando el docente cuestiona los conocimientos teóricos que sirven de base a la tecnología y a las técnicas asociadas.

Modelo de Davis (1984)

Davis (citado en Rico, 1995) plantea en su modelo un mecanismo mediante el cual analiza el pensamiento matemático del hombre y de algunos de sus errores, entre los cuales de destacan:

1. *“Reversiones binarias”*; ejemplos: $4 \times 4 = 8$, $3^2 = 6$.
2. *“Errores incluidos por el lenguaje o la notación”*, ejemplo: $2x - x = 2$.
3. *“Errores por recuperación de un esquema previo”*.
4. *“Errores producidos por una representación inadecuada”*

5. “Reglas que producen reglas”. Por ejemplo, la implicación $(x - 1)(x - 5) = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ ó } x = 5$, el estudiante pasa a concluir que $(x - 1)(x - 5) = 3 \Rightarrow x = 4 \text{ ó } x = 8$

Clasificación de los errores según Radatz (1979)

Radatz (citado en Rico, 1995) parte de la teoría del procesamiento de la información, estableciendo cinco categorías generales de errores:

1. “Errores debido al lenguaje”: Análogamente a las dificultades de aprendizaje de una lengua extranjera, el aprendizaje de los conceptos y símbolos matemáticos representan situaciones complejas para el estudiante.
2. “Errores debidos a dificultades para obtener información espacial”: En este sentido señala que la capacidad para pensar mediante imágenes espaciales o visuales constituye una fuente de dificultades para los estudiantes en la realización de sus tareas matemáticas.
3. “Errores producidos por un aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos”: Comprende esta categoría las deficiencias de conocimientos sobre contenidos, procedimientos y algoritmos para la realización de una tarea específica matemática.
4. “Errores debidos a asociaciones incorrectas o rigidez del pensamiento”: Esta rigidez puede ser producida por experiencias anteriores ante problemas o ejercicios similares y por la falta de flexibilidad para codificar y decodificar la nueva información. Esta categoría incluye errores por interferencia (operaciones o conceptos diferentes interfieren con otros), errores de asimilación (una audición incorrecta produce fallas en la lectura o escritura), errores de transferencia negativa a partir de tareas previas (impresión errónea de ejercicios o problemas verbales), y errores debido a las aplicación de reglas o generalizaciones irrelevantes.

Tipología de errores según Movshovitz-Hadar, Zalavsky e Inbar (1987)

Estos autores, según Kilpatrick (1995), hacen una clasificación empírica de los errores partiendo de un análisis constructivo de las soluciones de alumnos realizada por expertos.

Esta categorización está fundamentada más en el conocimiento matemático que en el procesamiento de la información, los autores determinaron sus categorías descriptivas de errores, como sigue:

1. *“Errores producidos por datos mal utilizados”*: Esta categoría comprende los errores derivados de una discrepancia entre los datos y el tratamiento dado por el estudiante, además de aquellos casos en los que el alumno añada datos “extraños” u omita algún dato necesario para la solución, contesta o responde a algo que no es necesario o no solicitado o se hace una lectura incorrecta del enunciado del problema o del ejercicio.
2. *“Errores producidos por interpretación incorrecta del lenguaje”*: En este caso se incluyen los errores asociados de una traducción incorrecta de objetos matemáticos expresados en un lenguaje simbólico a otro lenguaje simbólico distinto.
3. *“Errores ocasionados por inferencias no válidas lógicamente”*: Esta categoría involucra aquellos errores producidos por falacias de razonamiento y no por el contenido específico. Así, por ejemplo, en ésta se encuentran los errores derivados de concluir un recíproco o un contrario de una proposición condicional, obtener un antecedente por un condicional y su consecuente o concluir un enunciado en el que el consecuente no se deriva necesariamente del antecedente.
4. *“Errores originados por teoremas o definiciones deformadas”*: Esta categoría involucra aquellos errores producidos por deformación de un principio, regla o definición identificable.
5. *“Errores por falta de verificación en la solución de un problema”*: Comprende los errores que se suscitan cuando a pesar de que cada paso en la

ejecución de la tarea es correcto, el resultado final no es la solución de lo planteado y, al no contratarse la solución, el error no se precisa.

6. *“Errores técnicos:* Se incluyen en esta categoría los errores de cálculo, errores de manipulación de símbolos algebraicos y de ejecución de algoritmos básicos.

Clasificación de los Errores según Torre (2004)

Saturnino de la Torre (2004), sostiene que una clasificación general de los errores en matemática llevaría a identificar los siguientes tipos:

1. *“Inadecuada percepción de lo que se pide en el problema o ejecución”:* tales errores pueden originarse de una lectura precipitada, pasando inadvertido ciertos datos importantes.
2. *“Errores de planteamiento”:* producidos por una mala comprensión de los principales términos del problema, lo que conduce a la elección de procedimientos o fórmulas inadecuadas.
3. *“Errores de conceptos”:* cuando se plantean cuestiones teóricas o basamentos teóricos.
4. *“Errores de secuenciación de los pasos a seguir en un problema”:* se producen cuando no se respetan las prioridades en las operaciones o procedimientos, como por ejemplo la eliminación de los paréntesis.
5. *“Errores operativos o de cálculo”.*

Errores en el aprendizaje de la matemática según Socas (1997)

Socas caracteriza a los errores dentro de tres grandes ejes, a modo de ejes coordenados o direcciones, para ser abordados; lo que le permitiría, a su juicio, situar a los docentes con más precisión en los orígenes del error y favorecería el arbitraje de procedimientos y remedios más eficaces y efectivos. Estos tres ejes estarían determinados por:

1. *Errores que tienen su origen en un obstáculo:* Se incluyen bajo esta denominación los errores que se derivan del álgebra por la naturaleza abstracta de los elementos que se utilizan. Los estudiantes ven las expresiones algebraicas como enunciados que son algunas veces incompletos. Se plantean situaciones, a modo de ejemplo, donde se muestran dificultades y errores relacionados con la distinción entre la adición aritmética ($2+4$) y la adición algebraica, como en $x+4$, donde la expresión remite, a la vez, a un resultado y a la operación de sumar.
2. *Errores que tienen su origen en la ausencia de sentido dentro de los cuales destaca:*
 - 2.1. *Errores del álgebra que tienen su origen en la aritmética:* los errores que se presentan en el álgebra no son tanto dificultades en la misma sino problemas que se quedan sin corregirán la aritmética, tal es el caso de las fracciones, potencias, uso de los paréntesis u otros signos de agrupación, etc. El signo “-”, por ejemplo, cuando va colocado delante de un paréntesis, es generador de frecuentes errores.
 - 2.2. *Errores de procedimiento:* entre los que se destacan el mal uso de la ley distributiva y errores de cancelación o aplicación incorrecta de la ley cancelativa.
3. *Errores que tienen su origen en actitudes afectivas y emocionales.*

La Persistencia y Sistematización del Error

*"El hombre yerra mientras busca algo".
Goethe*

Se ha hecho referencia anteriormente a la persistencia del error por parte de nuestros estudiantes. En este sentido, en concordancia con Beyer (2003), la experiencia ha mostrado que algunos errores matemáticos que presentan los estudiantes con alta frecuencia son **persistentes**, y de acuerdo con las ideas de G.

Bachelard y G. Brousseau estos llegan a convertirse en obstáculos epistemológicos.

Brousseau, citado por Beyer (op.cit), establece que:

El error no es solamente el efecto de la ignorancia, de la incertidumbre, de la casualidad, sino que es el resultado de un conocimiento anterior, que ha tenido su interés, su éxito, pero que ahora se revela falso o simplemente inadecuado. Tanto para el maestro como para el alumno, el error es constitutivo del conocimiento adquirido. (p.58)

De allí entonces que el error se constituye en un elemento didáctico, que una vez detectado, reconocido y analizado, favorece la adquisición del verdadero conocimiento.

Popper, uno de los grandes filósofos de la humanidad, sostenía el carácter etéreo de la verdad, la cual presenta dificultades en su adquisición y que una vez lograda, se puede volatilizar con cierta facilidad, y que las creencias erróneas pueden lograr un gran poder de sobrevivencia, aún en directa oposición con la experiencia. Ello evidentemente subraya el carácter persistente del error, que de acuerdo con Beyer (op.cit), éste puede ser enfocado desde dos vertientes:

1. La persistencia en diversos individuos de diferentes épocas y contextos; tal es el caso, por ejemplo, del error $2^3 = 6$, el cual es reportado en diversas investigaciones, en lugares y épocas distintas.
2. La persistencia de errores en un mismo individuo; la cual puede llegar al extremo de que aún cuando el error le sea mostrado al estudiante en cierto número de veces y de realizar diversas actividades para superarlo, éste reaparezca en similares contextos en los cuales antes se ha presentado. Tal es el caso del error típico $(a + b)^2 = a^2 + b^2$ reportado comúnmente por los educadores e investigadores.

Estos errores caracterizados por su persistencia se han constituido en un foco de interés para investigadores, denominándolos **errores sistemáticos**. Al respecto Cox, citado en Beyer (op.cit), establece que “un error es etiquetado como un error sistemático cuando existe una respuesta incorrecta que ocurre repetidamente, la cual es evidente en los cálculos de un algoritmo específico” (p. 60). También Cox,

según Beyer, define operativamente otros tipos de errores, estableciendo una cierta categoría como: errores sistemáticos, errores aleatorios, errores por descuido, ausencia de error y errores no clasificables en las categorías anteriores.

La Temática del Estudio y su Ubicación en el Campo del Conocimiento

*"No existe un error tan intrincado
que no encierre un poco de verdad".
Tupper*

Resulta de interés en el presente estudio, la ubicación de la temática, como lo es el análisis de los errores de los estudiantes en el aprendizaje de la matemática, en el campo del conocimiento. Específicamente, por tratarse de un problema con implicaciones didácticas, resulta pertinente mostrar algunos enfoques didácticos del proceso de enseñanza y aprendizaje de esta disciplina.

Así, Vadillo y Klingler (2004), establecen que según sea la concepción que se tenga acerca de la matemática así será su enfoque didáctico o el proceso de enseñanza y aprendizaje de esta ciencia. Al concebirla como un saber terminado y rígido su didáctica estará centrada en la enseñanza de conceptos y procedimientos específicos mientras que, si se le considera como un cuerpo de conocimientos que se construyen en forma permanente su proceso de enseñanza y aprendizaje estará orientado por el interés hacia las complejas relaciones entre el objeto de estudio, el docente, el aprendiz, los recursos que se emplean y los contextos, tanto internos como externos que influyen en la educación matemática.

En este sentido, de acuerdo con Mesa (citado en Vadillo y Klingler, 2004) se pueden distinguir, a lo sumo seis enfoques didácticos, con la particularidad que los cuatro últimos que se nombran están bajo el modelo constructivista de la educación, modelo en el cual se sustenta la presente investigación. Así, se aluden:

1. ***El Enfoque de la Psicología de la Instrucción.*** En este se atomiza el conocimiento y se detallan la serie de contenidos temáticos; se corresponde con el enfoque conductual y en el que, mediante el análisis de tareas, se definen los objetivos elementales para ordenar secuencialmente las metas de

aprendizaje. Es el enfoque de los textos programados, las fichas y las largas secuencias de objetivos generales y específicos.

2. ***El Enfoque de la Psicología Cognitiva.*** Para Mesa, éste tiene su origen en los trabajos de Piaget, Brunner y Ausubel. Se centra en comprender los procesos de pensamiento mediante un análisis estructural y proponer metodologías vinculadas a los procesos de comprensión matemática, es el enfoque del uso de materiales según las etapas de desarrollo del alumno: Juegos libres, regularidades, representaciones, descripciones verbales, y por ultimo, definiciones.
3. ***El enfoque del procesamiento de la información.*** Se fundamenta en la observación minuciosa de las maneras de la resolución de problemas, precisando las regularidades de esos procesos para generar modelos que después son simulados en computadoras.
4. ***El Enfoque del Grupo PME (Psychology of Mathematics Education):*** Este enfoque es sostenido por un grupo de investigadores que argumentan que el psicólogo solo puede tratar áreas específicas del aprendizaje de la matemática como la jerarquización de las competencias y concepciones del estudiante, las interacciones sociales y los fenómenos inconscientes. Bajo este enfoque se encuentran el empleo de las computadoras y el aprendizaje matemático, el pensamiento matemático avanzado, los factores afectivos y sociales, la metacognición y el contexto natural extra-escuela de la enseñanza de la matemática.
5. ***El Enfoque Socio-Cultural.*** Con sus máximos exponentes en Vigotski y Bandura, para quienes las interacciones sociales son pieza fundamental en los procesos de enseñanza y aprendizaje de esta ciencia. Para Vigotski los conocimientos se adquieren a través de la interacción (plano inter-psicológico) y la internalización (plano intra-psicológico), es decir en el paso de lo inter a lo intra personal. El maestro es concebido como un mediador de experiencias de aprendizaje que transforma la realidad lejos de la imitarla. Es el enfoque del modelaje, manejo de contingencias, instrucción y preguntas.

6. ***El enfoque tecnológico:*** En este enfoque se incentiva el empleo de las calculadoras, específicamente en el campo de la geometría, las matemáticas discretas, el cálculo variacional y los problemas de estrategias.

CAPITULO III

ABORDAJE METODOLÓGICO

Identificación de la Perspectiva Paradigmática

*"Un error corregido (por el sujeto) puede ser más fecundo
que un éxito inmediato, porque la comprensión de una hipótesis falsa
y sus consecuencias prevé nuevos conocimientos..."*
J. Piaget

A lo largo de la exposición del presente informe, se ha estado dejando entrever, a través del discurso, elementos que muestran la postura o el enfoque paradigmático. Se parte del hecho de que cualquier enfoque paradigmático comprende cinco componentes fundamentales:

1. *El supuesto ontológico*, en el que se expresa la posición del investigador respecto a la realidad que se pretende estudiar.
2. *El supuesto epistemológico*, en el que se establece la relación entre el investigador y lo que se pretende investigar, a objeto de generar el conocimiento de la realidad.
3. *El supuesto metodológico*, que explicita la forma o la vía que se ha de transitar para procurar el conocimiento sobre la realidad a analizar.
4. *El supuesto axiológico*, en el que se expresan los valores que sustentan el hecho o fenómeno a investigar.
5. *El supuesto teleológico*, relacionado con la finalidad del estudio.

Estos cinco componentes: ontológico, epistemológico, metodológico, axiológico y teleológico se hallan íntimamente relacionados.

Según la concepción de Guba y Lincoln (citados por Valles, 1997), el plano ontológico "se refiere al ser en general". Así, en este nivel se produce la identificación de un paradigma al precisar "cuál es la creencia del investigador respecto a la naturaleza de la realidad investigada" (p. 49). En lo que respecta a la epistemología, la identificación resulta de la "relación que se establece entre el

investigador o el conocedor y lo que puede ser conocido” (p. 51). Aludiendo al componente metodológico, estos autores consideran que éste está ligado a los procedimientos metódicos que surgen a consecuencia de las posiciones adoptadas en los planos epistemológicos y ontológicos.

Se tiene entonces que, desde el punto de vista ontológico, esta investigación ha pretendido alcanzar una percepción de la realidad social, mediante una faceta comprensiva e interpretativa de esta realidad; entonces lo que puede determinarse de ella es ¿Cuál es la naturaleza de los errores sistemáticos de los estudiantes de Introducción a la Matemática?, ¿Cómo se originan?, ¿Cómo son esos errores?; es decir, se pretende conocer “cómo son realmente las cosas” y “cómo funcionan esas cosas”. En consecuencia, solamente resultarán lógicas aquellas preguntas que se han formulado en el planteamiento del problema, por ejemplo: ¿Cuál es la naturaleza u origen de los errores de los estudiantes de la asignatura Introducción a la Matemática de FaCES-UC, campus La Morita, en el estudio de las funciones reales? ¿Cuáles y cómo son?; en otras palabras, preguntas que traten de encontrar el significado dentro de una historicidad, específica e irrepetible de la realidad.

Se ha pretendido entonces, descubrir o develar la realidad desde el espacio de los propios actores, en su propio mundo, donde éstos expresen o expliciten con sus propias palabras cómo se produce en ellos el error, qué lo induce, con cuáles otros espacios de su vida ellos vinculan ese error.

En relación a los aspectos epistemológicos, se ha de discurrir a la manera como se ha de establecer la relación entre la investigadora y los sujetos de investigación, por ser ellos en quienes el error se manifiesta. Se asumió una realidad irrepetible, producto de una comprensión interpretativa, por lo que la postura epistemológica de la investigadora estuvo cónsona con la apropiación del conocimiento como producto de una interacción en el marco de una acción comunicativa. La realidad fue sujeto del conocimiento mediante una experiencia hermenéutica o interpretativa.

En lo que al componente metodológico se refiere, como se ha considerado que se ha partido de una realidad específica e irrepetible entonces se justifica el empleo de

métodos cualitativos para el abordaje del problema que aquí se ha planteado. Esta metódica cualitativa, tal como lo señalan Caiceo y Mardones (citado en Sánchez y Nube, 2003), persigue describir sucesos complejos en su medio natural e implica una observación atenta del comportamiento humano. El diseño siempre estuvo abierto al descubrimiento y el análisis a la interpretación.

Por otra parte, con respecto a los supuestos axiológicos que subyacen en el presente estudio, Martínez (2000), sostiene que los valores personales, propios del investigador, intervienen inevitablemente en la selección de los problemas, en el marco teórico que se recopile así como también en los métodos, técnicas y recursos que se empleen en la investigación. Señala que estos valores, además, orientan las interpretaciones de los resultados y la ética profesional; así, los valores que guían el presente estudio están representados, entre otros, por el sentido de lo humano en relación al rescate del hombre como sujeto y no como objeto de la educación, el respeto por las individualidades, el amor como fundamento de la educación, en el diálogo como elemento que rige lo social y en la consideración del hombre, señalado por Pérez (2001) como “un sujeto interactivo, que comparte significados” (p.31).

Finalmente, el supuesto teleológico sobre el que se ha sustentado el presente estudio responde a la pregunta ¿Para qué sirve la investigación?: En este sentido cabe señalar que el análisis de los errores que presentan los estudiantes en el aprendizaje de la matemática, desde la óptica de las teorías constructivistas, ha de favorecer el empleo de nuevos métodos de enseñanza y aprendizaje de esta ciencia, específicamente en el estudio de las funciones reales; para ello se partió, no de elementos aislados, ya que tal como lo señala Martínez (2000), éstos perderían su verdadero sentido, sino de la propia realidad natural en que se han suscitado estos errores; es decir, “casos o situaciones ejemplares o paradigmáticos: situaciones más representativas y típicas, estudiadas a fondo en su compleja realidad estructural” (p.41). La finalidad estriba entonces en poder penetrar con un carácter riguroso y sistemático en el problema de los errores referidos, explorarlos, analizarlos y

reflexionar sobre ellos para mostrar su complejidad, siguiendo las ideas de Pérez (2001).

Tipo de Estudio

"Cometer un error y no corregirlo es otro error".
Confucio

En cuanto a la naturaleza de los datos, este estudio corresponde a la modalidad de campo toda vez que según Sierra Bravo (citado en Ramírez, 1999) el fenómeno es analizado en su ambiente natural, es una investigación hecha en el propio terreno donde se sucede el fenómeno a investigar. Se dice que es una investigación “*in Situ*” dado que el contexto donde se desenvuelve es el ambiente del aula de clases.

De acuerdo al nivel de conocimiento científico al que se ha llegado con la presente investigación, éste se constituye en un estudio de tipo descriptivo, dado que se ha pretendido delimitar los hechos que conforman el problema de investigación, identificando formas de conducta y actitudes de los sujetos que conforman el universo investigado; tal como lo reseña la Universidad Pedagógica Experimental Libertador (2003) este diseño se corresponde con:

El análisis sistemático de problemas en la realidad, con el propósito bien sea de describirlos, interpretarlos, entender su naturaleza y factores constituyentes, explicar sus causas y efectos, o producir su ocurrencia, haciendo uso de métodos característicos de cualquiera de los paradigmas o enfoques de investigación conocidos o en desarrollo. Los datos de interés son negociados en forma indirecta de la realidad; en este sentido se trata de investigaciones a partir de datos originales o primarios. (p.64)

En este sentido, se propone identificar elementos y características del fenómeno a estudiar; se busca hacer entonces, una caracterización de los errores sistemáticos en los estudiantes que cursan Introducción a la Matemática, en UC-FaCES, Campus La Morita, en el estudio de las funciones reales.

Dado que el problema planteado y los hechos que comprenden abarcan, supuestamente, comportamientos sociales del grupo de estudio, actitudes, creencias, formas de pensar o actuar, se ha perseguido obtener una descripción de las mismas.

Así mismo, se presentan los rasgos que caracterizan e identifican los errores frecuentes en el aprendizaje de las funciones reales en la asignatura Introducción a la Matemática.

El Método de Investigación

*"Quien desee hacer lo correcto al por mayor,
deberá equivocarse al por menor".
Montaigne*

De acuerdo a la naturaleza cualitativa de la presente investigación, se considera que el método para abordar el problema que se ha planteado, se corresponde con el método etnográfico, toda vez que se pretende analizar y describir el comportamiento particular de los errores que presentan en el aprendizaje de la asignatura Introducción a la Matemática. Para Martínez (2002) este método consiste en la producción de “estudios analíticos y descriptivos de las costumbres, creencias, prácticas sociales y religiosas, conocimientos y comportamientos de una cultura particular”, (p. 199). En la aplicación del método etnográfico la “situación ideal de trabajo consiste en compartir la vida y las costumbres del grupo que estudian, hablan su lengua y recogen la información mientras participan en las actividades normales de la gente”. (p. 199). A juicio de este autor, se consideran como investigaciones de este tipo, investigaciones por lo general de tipo cualitativo, entre ellas educacionales, de campo, en las que prevalece la observación participante, investigaciones éstas que focalizan la atención en el ambiente natural, incorporando a los propios sujetos investigados como coinvestigadores. En este tipo de estudio, con la aplicación del método etnográfico, no se ha pretendido la manipulación de las variables por parte de la investigación.

Los elementos básicos que caracterizan el método, de acuerdo con Martínez (op. cit.) son los siguientes:

1. Se parte de un enfoque exploratorio y de una “apertura mental” sobre el problema de investigar.
2. Se realiza una intensa participación del investigador en el contexto o ambiente a estudiar.
3. El empleo de técnicas variadas y profundas de investigación con énfasis en la observación participante y la entrevista mediante informantes claves.
4. Énfasis en la comprensión de los hechos con el significado para quienes están en el ambiente social.
5. El empleo de la interpretación para determinación de la conducta a observar. Y por último,
6. La presencia de los resultados escritos, mediante los cuales se realiza la interpretación de los eventos y en donde se explicita con detalles la situación vivida, a objeto de que el lector pueda tener una visión profunda de esa realidad captada.

En relación a la justificación del método etnográfico, según Martínez (2002), el método ha de justificarse cuando de investigaciones educativas se trate, dado que en la actualidad, en esa área su uso se está extendiendo de manera vertiginosa. Considera que esta justificación puede hacerse desde dos ópticas de la conducta humana, las cuales gozan de un profundo contexto teórico como lo son la perspectiva naturalista-ecológica y la hipótesis cualitativa-fenomenológica.

Bajo la perspectiva naturalista-ecológica, numerosos estudios e investigaciones sustentan el hecho de que la conducta humana depende del medio en el que la misma se manifiesta; así, por ejemplo, se hace necesario estudiar los eventos educativos en su medio natural. Esta situación se evidencia en la “incapacidad de las teorías clásicas del aprendizaje para explicar la mayoría de los procesos que tienen lugar en el aula escolar” (p. 201).

En relación a la hipótesis cualitativa-fenomenológica, bajo este enfoque Martínez (2002) sostiene que es un tanto imposible comprender la conducta humana sin la comprensión del marco interno referencial desde donde los sujetos interpretan sus

pensamientos, sentimientos y acciones, para lo cual desde el punto de vista fenomenológico sugiere poner en práctica la “reducción fenomenológica” que consiste en “poner entre paréntesis”, como supresión temporal, teorías, intereses, ideas, e hipótesis que pueda tener el investigador, para observar así los fenómenos desde la propia óptica de los sujetos.

Por otra parte, en lo que respecta al nivel de participación del investigador en el presente estudio, se tuvo presente la no identificación del investigador con una parte o con cualquier grupo del ambiente (aula de clase) y se trató de percibir cómo éste es visto por los miembros del grupo; en todo caso se intentó en todo momento que los sujetos manifestaran confianza en él, por contarse que el investigador es el propio docente que ha convivido en una situación didáctica con los sujetos, quienes a su vez son sus propios estudiantes. Ello ha de ser significativo por cuanto la etnografía parte del supuesto de que la gente dice y actúa, consciente o inconscientemente, según la situación social en la que se está inmerso.

Recolección de la Información

Partiendo del hecho, tal como lo señala Martínez (2002), de que para la etnografía es de gran relevancia la información que más se relacione y que permita descubrir las estructuras significativas que originen la conducta de los sujetos de análisis, son procedentes entonces, los siguientes tipos de información, entre otros:

1. Contenido y forma de la interacción verbal de los sujetos entre sí y de los sujetos con el investigador.
2. El lenguaje corporal.
3. Los patrones de acción y no acción, el comportamiento de los sujetos o su pasividad.

En tal sentido, se ha empleado, como técnica primaria, para recoger la información la observación participante y los grupos focales, con sus correspondientes instrumentos, como lo son el registro de observaciones o notas de campo tomadas in

situ y/o después del evento observado y el guión de preguntas abiertas, respectivamente. Se complementaron las observaciones con grabaciones de audio realizadas también in situ.

Por otra parte, toda investigación requiere de una sustentación teórica tal como se ha evidenciado en el capítulo precedente. En tal sentido, con la finalidad de sistematizar, organizar la búsqueda documental, archivar y facilitar la elaboración tanto de los antecedentes, como del basamento teórico, se ha empleado el Sistema Fólder, con su correspondiente instrumento como lo es la hoja de registro (Anexo A), para reseñar las diferentes fuentes consultadas, electrónicas y/o impresas. Dichas hojas de registro fueron almacenadas en una carpeta que se dispuso para tal fin.

Sujetos de la Investigación y Nivel de objetividad de la Investigación

Según Martínez (2002) la investigación etnográfica se caracteriza por su alto nivel de objetividad conferido por su enfoque fenomenológico, a la “cuidadosa selección de muestras que estudia, a la empatía que logra con los sujetos, a su buen nivel de confiabilidad y a su notable validez”. (p. 203).

Para el presente estudio se consideraron los estudiantes de la sección 32 de Introducción a la Matemática para los cuales la investigadora es docente; dentro de éstos, se tomaron, además, diez (10) sujetos que se estudiaron a fondo, seleccionados intencionalmente. Se juzgó procedente seleccionar esta sección ya que la misma estuvo conformada, en un cien por ciento, por estudiantes repitientes en la asignatura en cuestión.

Martínez (op. cit.) señala que al seleccionar una muestra se han de eliminar los sujetos o casos atípicos o muy peculiares, procurando que la misma represente lo mejor posible los subgrupos naturales, que “...tenga en cuenta los casos negativos o desviantes, pero haciendo énfasis en los casos más representativos y paradigmáticos y explotando a los informantes clave” (p. 54).

En este orden de ideas, estos diez sujetos se seleccionaran de acuerdo al criterio de que éstos posean buena capacidad de información; así, se han de seleccionar aquellos estudiantes en donde los errores se presenten con mayor evidencia y con mayor frecuencia, y que estos errores se correspondan con los que comúnmente se presentan u ocurren en la mayoría de los estudiantes. En este aspecto, jugará un papel muy importante la experiencia de la investigadora en su larga trayectoria como docente en la asignatura, la cual data en más de diez y nueve (19) años en Educación Superior y treinta de labor docente en el área. En todo caso, con este enfoque no se ha pretendido realizar mayores generalizaciones en función de los hallazgos encontrados, sino que, más bien se ha aspirado ofrecer resultados y sugerencias para motivar cambios didácticos en la cátedra de Introducción a la Matemática y/o en la institución.

Metodología

Fases del Estudio:

Primera fase:

Esta fase comprendió las 16 semanas correspondientes al desarrollo del periodo académico II-2005. A lo largo de esta fase se empleó la observación participante centrada en las dificultades, obstáculos y errores puestos de manifiesto por los estudiantes, sujetos de la investigación, durante todo su proceso de aprendizaje de la asignatura, y particularmente se centró la atención en el capítulo correspondiente a funciones reales, toda vez que esta unidad programática se constituye en la base de cualquier curso previo al cálculo, en el que se han de adquirir las conductas prerrequisito para las subsiguientes asignaturas que han de ser cursadas por estos estudiantes tales como Matemática I, Matemática II, Cálculo Financiero, entre otras.

En este sentido se observó la construcción del conocimiento considerado como correcto así como también el conocimiento errado tal como lo expresan Astolfi,

Brousseau, Bachelard y Piaget, entre otros autores referidos a lo largo de este informe.

Segunda fase:

Esta segunda fase se consideró, como fuente primaria de información, el producto generado por los estudiantes mediante la aplicación de la evaluación escrita, recogida mediante las pruebas o exámenes, N° 3 y N° 4 y talleres realizados en clase, correspondiente a la unidad o capítulo en estudio.

Tercera fase:

En ella se identificaron los diferentes errores encontrados y se contrastan a la luz de las diferentes tipologías existentes y a las experiencias de las diferentes teorías referenciales en materia de errores.

Cuarta fase:

Se procedió al escaneo de estos errores encontrados para ser presentados y analizados como imágenes.

Quinta fase:

Esta fase abarcó la aplicación de la técnica de investigación cualitativa denominada *grupo focal*, dado que con ésta se obtienen respuestas a profundidad sobre lo que piensan y sienten los actores. Consistió en la realización de dos encuentros con los grupos de los estudiantes con problemas de repitencia en la asignatura; comprendió dos sesiones de 90 minutos cada una, en las que se propició la libre expresión de los estudiantes con la finalidad de identificar percepciones de los mismos en relación a los contenidos matemáticos, específicamente al tema de las funciones reales; así como también, identificar aspectos subjetivos asociados a los errores de los estudiantes en el aprendizaje de tales tópicos.

Para la aplicación de la técnica exploratoria de los grupos focales se implementaron dos sesiones con un grupo de cinco participantes cada una, guiadas por un moderador que facilitó las discusiones, en las que se manejaron los aspectos cualitativos referidos bajo las siguientes dimensiones abordadas:

- Significación de los contenidos matemáticos incluidos en el tema de las funciones reales.
- Importancia de los contenidos matemáticos en la vida cotidiana.
- Reconocimiento de los errores.
- Impacto emocional de los errores.
- Tipos de errores, identificación subjetiva.
- Trabajo personal para superar, corregir y derivar aprendizaje de los errores.
- Estados emocionales (temores, aprensiones, rabia, etc.) contactados en el momento de realizar operaciones matemáticas o en el aprendizaje de las mismas.
- Apoyo individual requerido para superar las dificultades y obstáculos en el aprendizaje del tema.

El moderador empleó una guía de discusión y formuló de manera adecuada las preguntas orientadas, respondiendo en forma natural a los comentarios, estimulando con ello la participación de cada grupo. Además del moderador, se contó con la presencia de un relator quién registró, con ayuda de una grabadora, las reacciones lingüísticas de los participantes.

Para el diseño de la guía de discusión se establecieron previamente los objetivos, se definió el preámbulo con la idea de reducir el clima de tensión en los encuentros, y se elaboró un cuestionario de preguntas de discusión abierta, de manera lógica, de fácil comprensión y de manera coherente con los objetivos. Se incluyó en este cuestionario una selección de algunos errores que fueron detectados en la ejecución de tareas y/o exámenes de los participantes, los cuales fueron presentados en forma escrita a los mismos (Anexo C)

Se eligió previamente la hora más conveniente para los participantes, así como el lugar y la realización de la convocatoria correspondiente. Dándosele la bienvenida a los participantes, se presentó el preámbulo, se dieron las instrucciones generales de modo tal que se permitiera la ubicación mental del grupo en el debate. El moderador

formuló la primera pregunta e invitó a los presentes a participar en la discusión, se empleó el recurso de la “respuesta anticipada” en aquellos casos en los que no se obtenían respuestas, consistentes en la emisión de algunas alternativas posibles para propiciar que los presentes asuman, se adhieran o rechacen las sugerencias, induciéndose así el debate.

Este debate fue guiado prudentemente por el moderador, cuidando de no ejercer presiones, intimidaciones ni sometimientos, dado que interesó, no la respuesta deseada, sino la elaboración mental y las propias respuestas y reacciones del grupo. Se prestó especial atención, además del desarrollo de los contenidos que se debatieron, a las actitudes de los participantes, distribuyéndose convenientemente el uso de la palabra, alentándose a los tímidos o a los que permanecían en silencio. Se observaron además las posibles inhibiciones o dificultades y en aquellos casos que se consideraron procedentes, éstas fueron puestas de manifiesto por parte del moderador.

El moderador cuidó además “entrar”, de manera recurrente, en el tema; dado que su función se estimó primordialmente en conducir, guiar, estimular, la discusión. Se mantuvo siempre una actitud cordial, serena y segura a fin de servir de apoyo, sobre todo, en aquellos momentos en que emocional o intelectualmente se pudiera elevar el tono de las discusiones. Se cuidó de admitir todas las opiniones, a objeto de evitar que cualquiera de los participantes pudiera sentirse rechazado, burlado o en minusvalía; por cuanto la finalidad consistió en guiar al grupo hacia ideas correctas y valiosas.

Procedimiento de Análisis

A fin de procesar la información obtenida mediante la ejecución de la última fase, antes descrita, se procedió a la:

- Transcripción de los encuentros verbales (grupos focales)
- Identificación en el discurso de los aspectos relevantes, tales como:

1. La naturaleza del error.
 2. Percepción sobre los contenidos susceptibles al error por parte de los estudiantes.
 3. Aspectos emocionales o actitudinales asociados a los errores.
 4. Aspectos subjetivos de los estudiantes asociados a los errores.
- Identificación de las expresiones análogas y recurrentes entre ambos grupos focales, así como también la presencia de aquellos no recurrentes o coincidentes.

CAPÍTULO IV

ANÁLISIS E INTERPRETACIÓN DE LOS RESULTADOS

"Experiencia es el nombre que todo el mundo da a sus errores".

Oscar Wilde

Relativos a la Aplicación de la técnica de los grupos focales

A los fines de sistematizar la información obtenida y una vez realizado el procedimiento de análisis descrito anteriormente, se han resumido los aspectos resaltantes y coincidentes en dos matrices de doble entrada para cada grupo focal, en las que las filas representan las opiniones de los sujetos, codificados como **SXY**, donde “X” representa el grupo focal 1 ó 2, según sea el caso, y “Y” representa al sujeto que se ha enumerado de 1 a 5 respectivamente; las columnas contienen las categorías relativas al impacto emocional de los errores, tipos de errores, reconocimiento de los errores, origen de los errores, contenidos susceptibles al error y trabajo personal para superar los errores, en lo que respecta a los aspectos subjetivos de los estudiantes asociados a los errores. Así como también, los usos prácticos, intereses según contenidos, expectativas a futuro, significación de los contenidos, la matemática como requisito u obligación y la definición o concepción de los errores, en lo que respecta a las percepciones de los estudiantes sobre la matemática. Tales categorías emanan del discurso y la narrativa producida a través de los diálogos generados en los encuentros de los grupos focales. Estos encuentros fueron registrados mediante notas de campo y grabaciones de audio cuya transcripción forma parte del anexo B

En este orden de ideas, las matrices fueron presentadas en los siguientes cuadros codificados como:

- AS1 y AS2 que resume los aspectos subjetivos asociados a los errores de los estudiantes participantes en el grupo focal 1 y 2, cuadros N° 2 y 3 respectivamente.
- PM1 y PM2 para mostrar las percepciones sobre la matemática de los estudiantes participantes en el grupo focal 1 y 2, cuadros N° 4 y 5 respectivamente, los cuales se muestran a continuación:

CUADRO 2.

AS1. ASPECTOS SUBJETIVOS DE LOS ESTUDIANTES ASOCIADOS A LOS ERRORES

Categorías Sujetos	Impacto emocional de los errores	Tipos de errores, identificación subjetiva	Reconocimiento de los errores	Origen de los errores	Contenidos susceptibles al error	Trabajo personal para superar los errores	Definición o concepción de los errores
S11	Uno se pone... se histeriza toda porque cree que lo hizo bien... uno se da cuenta que lo sabe hacer, que es una tontería, estupideces...	Él lo piensa su manera, usted lo entiende pues... un error de lenguaje. Error garrafal	Por mi parte yo soy muy acelerada, yo hago la prueba muy rápido y entonces después cuando ya estoy terminando y la estoy viendo, veo que me equivoque en las multiplicaciones, sumas, en los signos, ay!...O uno mismo si se da cuenta que ha cometido el error... tiene que repetir la pregunta.	...no me fijo bien en lo que tengo que ver. No tengo concentración, soy muy dispersa. Por mi parte soy muy acelerada, yo hago la prueba muy rápido.	...el producto cartesiano. ...representando los números en la recta real. ... multiplicaciones, sumas y signos. ... dominio,	Indagar sobre cual fue el error, tratar de ustedes (profesores) o de un amigo. Si uno se aclara claro que queda allí.	... Cuando creemos saber algo y... y lo hacemos y no es pues... ... una tontería estupideces.
S12	...Cuando uno sale de la prueba, uno... ¡ay me equivoqué!... ...pero también nos angustia, ¡Que cónchale!, nos vaya a quedar (la materia)... Nos ahogamos en un vaso de agua cuando estamos haciendo la prueba. No, ya eso te da rabia.	De procedimiento, conceptual Error por no visualizar Error por no revisar	...cuando uno va terminando (la prueba), es que uno se da cuenta que arriba tuvo un error y tiene que ir borrando. Si se hubiese visualizado... no haciendo eso el resultado esta malo. ... si se hubiese revisado hubiera detectado la falla.	...mala base de bachillerato...se vuelve todo una maraña... ...falta de concentración. ...si influye profe (el tiempo). ...porque uno tiene la presión de que no le va a dar tiempo. ...uno no visualiza bien lo que en el ejercicio haría. Como somos más poquitos en la sección, la profesora se dedica más a nosotros, le preguntamos más a ella, es como que existe una mayor confianza para preguntar que cuando en el salón hay mucha gente, uno piensa que se van a reír, criticar, pitar.	... una cuestión de multiplicación, cuando hay un signo fuera de un paréntesis, que hay que multiplicar todo eso que afecta a todo el paréntesis... ...se me olvidó el producto notable.	No... no me detengo a ver porqué fallé ni nada. Hay que estudiarlo para no cometerlo otra vez. Además de la de nosotros mismos estudiar y la del profesor también que nos aclare las dudas.	Una falla..., algo fáctico... Son propiamente puros detalles... Nos equivocamos, de manera inadecuada. Yo digo que es una equivocación que uno tiene. Por ejemplo como dice Valentina, cuando hacemos un ejercicio y uno piensa que está bien, pero por ciertas fallitas ahí nos equivocamos.
S13	... de repente en el examen es donde surgen otras cosas, que nervios... uno con		De repente en el examen tuve que...aja cometimos un error y en el mismo examen nos damos cuenta de que hemos cometido el	No tengo concentración, yo pienso que es concentración, y que... será distracción también. ... por falta de estudio, en muchas ocasiones...	Mínimo común múltiplo. A mí me cuestan mucho, los mínimos cuando son con exponentes que	...Si tengo algo malo no lo borro, ya que me sirve de guía para corregir mis errores. La manera... es - no,	Algo que no hacemos bien...

CUADRO 2 (cont.)

	el tiempo...viene la presión...vienen los nervios... las manos sudorosas.		error y lo volvemos hacer. ... cuando vemos que resolvemos la prueba en clases y vemos que fue tan simple, nos equivocamos en todo.	...no tengo concentración El tiempo... con el tiempo...viene la presión.	traen una base me cuestan bastante... ... si donde se tenga que factorizar... Las raíces... esa es la confusión.	bueno, para la próxima-. Si no se aclaran, las dudas siguen.	
S14	Con rabia, desesperación, ira... A veces en mi caso es por... no sé me pongo nerviosa, a veces por falta de de... como queme pongo así como que a bloquear. En el momento que estamos inspirados, uno se queda, uno se tranca.	Error de conceptos Error de lenguaje	...son propiamente puros detalles que uno dice, pero cónchale... se equivocó por puras exigencias... ... lo coloqué por colocarlos, o sea, no, no... ...que no defino las funciones. ...uno confunde y mezcla las cosas.	...se unen las dudas que traemos con las que estamos viviendo... El tiempo y la presión. ... me vienen tantos ejercicios a la mente, entonces no se como definirlos en el problema que estoy realizando.	Operaciones básicas	O sea (responde el profesor) las preguntas que hagamos. Estudio más... El error queda allí. Hay que estudiarlo para no cometerlo otra vez, aclarar las dudas... Preguntar porqué salió esto malo aquí.	... una falla... Son propiamente puros detalles, por ejemplo que uno hace en los errores, son así puros detalles que uno dice pero cónchale...se equivocó por puras estupideces...
S15	Uno se bloquea (en el momento del examen) Da tanta ira contra ello.	Error de procedimiento	Y por los menos no... no me intereso más en ello.	Yo creo que es una falta de... metodología, no sigo un orden, no sigo una especie de procedimiento, a veces me enredo toda. ... volver a leer la pregunta, si uno vuelve a leer la pregunta uno sabe como es el procedimiento de esa pregunta, no hacerlo así como que...		No, porque siento tanta ira que ni veo la prueba, o sea, la guardo por allá y no la veo más nunca. Mas nunca los veo (los errores) me da tanta ira contra ello. Tengo tanta ira que lo dejo ahí y si es posible le prendo candela. No me intereso más en ello. Tratar de afrontar más mis errores. ... no deshacerme de ellos así por así, porque pasa la otra y vuelven. ...porque a veces uno no se da cuenta de sus propios errores.	

Nota: Cuadro elaborado por la Investigadora.

CUADRO 3.
AS2. ASPECTOS SUBJETIVOS DE LOS ESTUDIANTES ASOCIADOS A LOS ERRORES

Categorías Sujetos	Impacto emocional de los errores	Tipos de errores, identificación subjetiva	Reconocimiento de los errores	Origen de los errores	Contenidos susceptibles al error	Trabajo personal para superar los errores	Definición o concepción de los errores
S21	... espero, que si de verdad tuviera un propósito le podamos tener confianza	Ese es un error de concepto... ... Pero son errores que persisten	... yo decía, córchale no puede ser... tengo algunos errores que son bobos...	... uno empieza a inventar y si comienza a inventar comienza a fallar... Si uno está consciente de lo que esta haciendo, equivocarse es muy difícil.	Tenemos confusión en los dominios... los conceptos... Factorización. Propiedades de una raíz...	Trato de puntualizar el error y resolverlo correctamente con un compañero... y veo como se hace y luego trato de mantenerlo en la mente... ... voy acumulando una gran cantidad de errores pasados que los voy resolviendo.	... Confusiones, pequeñas... de cosas que uno creía haber ya dominado. ... yo decía córchale no puede ser... ahorita aunque yo he visto la materia varias veces todavía tengo algunos errores que son bobos pues, pero son errores que persisten, que quizás antes no los había visto o que no los había tratado así tan puntualmente, sin embargo, he resuelto muchos, muchos de los errores que tenía.
S22					Logaritmos	Siempre busco orientación... busco alguien con quien estudio, alguien que me explique o busco ejercicios resueltos	
S23	(El programa de funciones) que sea algo que nos entusiasme. ... los alumnos no tienen esa ilusión para	Si el error lo cometí por descuido... y... por ignorancia. ... Bueno sería errores conscientes y errores	... trato de ver que pasó allí para aprender...	... pero no le encuentro un resultado porque me tranco en algunas cosas... ... no tuvimos ese énfasis en el bachillerato con la matemática, que esa base es la que nos sirve ahorita.	Tuve muchos problemas con los mínimos común múltiplos,... factorizar...Ruffini ... que le faltaba una x, muchos	Si el error lo cometí por descuido mío, mira, trato de no hacerlo para la próxima y si... tengo un error por ignorancia, trato de	

CUADRO 3 (cont.)

	matemática como contador... ... Bueno, uno necesita que se queden las cosas y no se vayan...	inconscientes. ... una confusión de conceptos...		... si tienes mente negativa te agarran los nervios y si te agarran los nervios ahí hiciste mal, error tras error.	pusimos x por uno, o sea la x cuando es uno, la x valía cero. Fracciones. Las raíces.	ver que paso allí para aprender.	
S24	... cuando uno presenta un error uno se siente como que... insatisfecha. ... cometí un error ¡ya!, ya no sirvo, ya no puedo...	... los errores básicos están por descuido y son errores de la percepción, no son errores por fallas de conocimiento... son los peores porque uno de verdad sabe como hacerlo pero se confunde...		No es quizás el objetivo que uno se plantea, no es... vamos a ver donde está el error... o donde está la raíz o buscarle solución.	... funciones lo comprendí... pero llevarlos a la práctica eso se me hace difícil.	Bueno, yo en matemática veo donde está el error y en una próxima poder decir que sé donde estuvo el error.	... es como un bloqueo.
S25	... por lo menos ese tipo de objetivos: límites, derivada, funciones, son cosas que ya las vistes, ya las pasaste, feliz por ti que la pasaste.			...eso no es para uno está claro en lo que está haciendo... para estar claro hay que estudiar, estar mas pendiente y seguro, hay que estar lo más preciso. Yo no hacía ejercicios no practicaba...			... es falta de ejercicios de práctica, de estudio.

Nota: Cuadro elaborado por la Investigadora.

CUADRO 4.
PM1.PERCEPCIONES DE DE LOS ESTUDIANTES SOBRE LA MATEMÁTICA

Categorías Sujetos	Usos Prácticos	Intereses según contenidos	Expectativas a futuro	Significación de los contenidos	La matemática como obligación/ requerimientos
S11	... los vamos a estar utilizando diariamente. ...como que nos ayuda a desenvolvernó. ... las gráficas nos han servido en la economía, en problemas de la oferta y demanda, los precios... eso está como relacionado con las cosas de nosotros a diario.	Bueno profe cuando Ud. dice funciones lo primero que se me viene a la mente es gráfica. ... la mayoría se lleva bien con funciones. El que no pase la prueba de lógica no va a pasar la materia.	Yo me imagino que eso mas adelante lo vamos a utilizar... ... gráfica más que todo.	¿Eso de graficar? ... lo primero que me viene a la mente es grafica. Graficar el sistema de coordenadas, puntos, rectas, parábola, curva, todo eso.	El que no pase la parte de lógica, no va a pasar la materia
S12	... De como administrar	... Gráficas. ... Creemos que no necesitamos la teoría para...		... Gráficas...	Cuando uno viene aquí se vuelve todo complicado...el Prof. de bachillerato medio daba la clase, entonces uno viene aquí y entonces pareciera que todo fuera nuevo pues.
S13		... (Funciones) nos sistematizamos... en que no podemos aprender eso.		... funciones es el objetivo más difícil.	La parte de funciones es la más difícil.
S14	En la economía estamos viendo muchas gráficas. Las gráficas nos han servido en economía.	La parte de lógica (más fácil). Las gráficas.			Uno como que se graba eso (que es difícil) aquí (señalando la cabeza)
S15	Bueno yo pienso que sería como parte de la economía más bien...				

Nota: Cuadro elaborado por la Investigadora

CUADRO 5
PM2. PERCEPCIONES DE DE LOS ESTUDIANTES SOBRE LA MATEMÁTICA

Categorías Sujetos	Usos Prácticos	Intereses según contenidos	Expectativas a futuro	Significación de los contenidos	La matemática como obligación/ requerimientos
S21	(el programa de funciones debe ser) “algo que sea mas útil”. ... la parte funcional no es útil pues. ... el uso en la carrera en sí, hay poca aplicación directa a lo que nosotros estamos aprendiendo aquí.	Quizás la contabilidad la llevamos más rápido y si vamos a ser contadores entonces no nos vamos a enfocar en eso... en un negocio de empanadas... no utilizamos límites ni derivadas...	Bueno, yo espero que, en el futuro en nuestra carrera eso nos ayude en algo... Si lo estamos estudiando significa que tiene un propósito... espero que si de verdad tuviera un propósito le podamos tener confianza.	... yo tampoco le encuentro mucho sentido. (el programa de funciones debe ser) “algo que nosotros identifiquemos más, podemos prestarle mas atención.	No te preocupes por la matemática que una vez que la pases mas nunca la vas a utilizar, ejerce profesionalmente
S22	Yo creo que todas las matemáticas en sí, siempre en algún momento lo hemos visto en el bachillerato, en algún momento lo hemos usado en la vida y que también en la universidad lo hemos utilizado por algo.		Me imagino que todo lo que estamos viviendo es para el futuro... más adelante que realmente le vemos a ver un fin... ... el producto quedará allí.	...Quizá eso nos da un punto para ver otras cosas...	
S23	... yo quisiera saber el para que nos sirve... yo poco lo relaciono con la vida diaria. ...(con la lógica la utilidad es) pensar las cosas mas detalladamente.	“...lo que si me ha identificado bastante ahorita en introducción a la Matemática ha sido la lógica, la lógica proporcional... te ayuda a analizar... la cuestión de las herramientas, eso si me gusta”.	... pero de verdad no lo relaciono, aquí, para que me sirve en el futuro...	...(a funciones) ... todavía no le he encontrado ese sentido... (de utilidad) ... pero... funciones... no le llego todavía a ese sentido.	... lo vemos como una materia que deberíamos pasarla, pero no como una materia que hay que estudiar día a día
S24	(las funciones) no las uso			Algunas veces he	

CUADRO N° 5 (cont.)

	para nada... ... A mi me pasa igual con funciones, yo no las uso para nada... ... polimonios, ni nada de eso que hemos visto, eso se usa para nada.			escuchado que se necesitan algunas cosas de Introducción para ver Matemática I pero nunca nos han dicho que lo de Matemática I se necesita para entrar en el negocio administrativo.	
S25	Bueno yo pienso que sería como parte de la economía más bien...				... por lo menos ese tipo de objetivos: límites, derivadas, funciones, son cosas que ya las viste, ya las pasaste, feliz por ti que las pasaste

Nota: Cuadro elaborado por la Investigadora

Así, entre los aspectos subjetivos de los estudiantes asociados a los errores, se encontró el impacto emocional que éstos tienen sobre los estudiantes, evidenciándose situaciones descritas por los propios actores como situaciones de angustia, rabia, desesperación, bloqueos, falta de motivación o ilusión por el aprendizaje, insatisfacción y desconfianza ante la presencia de los mismos, en su aprendizaje sobre las funciones reales; lo cual evidentemente no redundaría en beneficio del proceso de aprendizaje, dado que lógicamente estas emociones no permiten crear el contexto adecuado para el mismo.

Por otra parte, se evidenció en forma coincidente la identificación subjetiva o clasificación que hicieron los estudiantes sobre sus propios errores, tipificándolos como:

- *Errores de concepto o conceptuales*
- *Errores persistentes*
- *Errores por descuido*
- *Errores conscientes*
- *Errores inconscientes*
- *Errores de la percepción*
- *Por fallas de conocimiento*
- *Errores de lenguaje*
- *Errores garrafales*
- *De procedimiento*
- *Por no revisar*
- *Por no visualizar*
- *Errores de cálculo*

Esta interesante gama de errores es curiosamente concordante con algunas de las ideas expuestas por diversos teóricos en el tema, como es el caso de G. Bachelard con su noción de obstáculo epistemológico y la similitud con los errores persistentes referidos por los estudiantes, así como también por Cox, Movshovitz-Hadar,

Zalavsky e Inbar. Análogamente, resulta coincidente con lo observado por la investigadora en su trayectoria como docente en el área, las dificultades, obstáculos y errores que se evidencian en el uso del lenguaje simbólico propio de esta asignatura y que en esta ocasión son reportados por los sujetos de la investigación como errores de lenguaje, tal como lo expresan Davis y Radatz en sus correspondientes categorizaciones.

Por otra parte, en lo que respecta a la categoría emergente relativa al reconocimiento del error, en líneas generales, se evidenció a través del discurso poco reconocimiento o falta de aceptación de los mismos por parte de los estudiantes. Estos los refieren como *“puros detalles”*, *“puras exigencias”* o simplemente *“no me intereso mucho en ello”*, *“no me intereso mas en ello”* y *“tengo algunos errores que son bobos”*.

Esto representa un resultado de interés a los fines didácticos, ya que el docente en vías de generar el aprendizaje correspondiente, ha de comenzar por el favorecimiento de cambios paradigmáticos en lo que a concepción de error se refiere por otro que lo sustituya como un elemento o instrumento primordial en el aprendizaje, tal como lo reafirma Torre (2004), “el error no conduce a nada si no va seguido de una reflexión sobre el mismo para develar la verdad” (Pág.27). Se requiere redimensionar o revalorar el error; “el éxito, ha escrito Luria citado por Torre (op.cit), depende en gran parte de concentrar los recursos que podemos tener en la tarea que tenemos a mano. El estilo personal es, en parte, la forma en se afrontan los obstáculos y en que, a veces se les supera”.

En esta categoría surge también el hecho de que algunos de los errores se suscitan por no haber hecho una visualización de la situación dada (Radatz) o por no haber hecho la correspondiente revisión previa o verificación de la solución, tal como lo muestran Movshovitz-Hadar, Zalavsky e Inbar con su respectiva tipología o simplemente pocos se interesaron por saber lo que había pasado allí en esa situación.

De acuerdo con Torre (op.cit) la transformación paradigmática del error no pretende allanar el camino de dificultades, ni evitar los errores, tampoco provocarlos,

sino darle su justa utilidad cuando surjan. Así, de acuerdo con este autor, el error que desanima se transforma en el error que atrae la atención del docente y del alumno. Este puede llegar a ser utilizado como estrategia didáctica en situaciones de aprendizaje, dado que el error presupone algún tipo de aplicación previa. Tal como se ha reiterado anteriormente, el reconocimiento de los errores es clave en el tratamiento didáctico (diagnóstico y tratamiento) de los mismos; Giordan (1985) lo considera inmerso dentro de las dos fases previas a la rectificación de los errores como lo son la localización y la descripción.

Otra de las categorías que fueron encontradas entre el discurso de los participantes en los grupos focales, es la relativa al origen de los errores, que de acuerdo a la información obtenida, ésta es de naturaleza diversa. Un punto de coincidencia en este aspecto lo constituyó la falta de concentración. Muchos de los estudiantes le atribuyeron sus errores a su falta de concentración. No constituye un secreto, ni nada excepcional, el hecho de nuestros estudiantes se encuentran hoy por hoy tentados por variados y atractivos agentes externos que favorecen la dispersión (videojuegos, celulares, etc.).

En esta categoría también surge el problema de la elección del método, procedimiento o la técnica adecuada para resolver los problemas, que autores como Brousseau, Movshovitz, Torre, Astolfi, Booth entre otros y que han señalado en las correspondientes tipologías descritas con anterioridad a lo largo de este trabajo.

Análogamente, los estudiantes argumentan que sus errores se originan por la deficiencia de conocimientos previos, evidenciado ello cuando expresan que éstos surgen por una *“mala base de bachillerato”*, *“se unen las dudas que traemos con las que estamos viendo”*, *“no tuvimos ese énfasis en el bachillerato con la matemática, que esa base es la que nos sirve ahora.”*. En este sentido, Radatz, citado por Rico (1995), establece en su tipología que éstos son errores debido a un aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos. Éstos incluyen todas las deficiencias de conocimientos sobre procedimientos específicos para la realización de una tarea matemática, incluyendo ignorancia de algoritmos, conocimiento inadecuado

de los hechos básicos, procedimientos incorrectos en la aplicación de técnicas y dominio insuficiente de símbolos y conceptos relevantes.

En este mismo orden de ideas, relacionadas con los orígenes del error, es de interés resaltar la afirmación relatada por los propios sujetos, los cuales comentan que en un curso de numerosos estudiantes, ellos se sienten cohibidos para hacer preguntas en clase; lo que hace que no se realice un trabajo previo para aclarar las dudas, disolver obstáculos o minimizar las dificultades, por temor a ser burlados, pitados, criticados por sus propios compañeros.

Otro de los aspectos develados por los actores en los encuentros de los grupos focales, fue el atinente a aquellos contenidos susceptibles al error y, en este sentido, fueron reportados los siguientes: *Producto cartesiano, la representación de los números reales en la recta real, multiplicaciones (distributividad), sumas y signos, determinación del dominio de las funciones reales, cuando hay un signo fuera de un paréntesis, productos notables, mínimo común múltiplo entre polinomios, factorizaciones, raíces de un polinomio, operaciones con radicales, propiedades de los radicales, logaritmos, las fracciones y “operaciones básicas”*.

Esto muestra una interesante gama de conceptos y algoritmos que el docente ha de considerar para acercar al sujeto al conocimiento y acortar la zona de desarrollo próximo tal como la describe la teoría Vigotskiana. Socas (op.cit.), establece, dentro de las tres direcciones para abordar el tema de los orígenes del error en matemática y favorecer en los docentes procedimientos y remedios efectivos, la consideración de los errores que tienen su origen en ausencia de sentido y dentro de éstos, distingue los errores del álgebra que tienen su origen en la aritmética y en este sentido, señala que a veces las dificultades, y por ende los errores, que se suscitan en el álgebra, se derivan de problemas o dificultades que se quedan sin corregir en la aritmética; tal es el caso de las fracciones, el uso de paréntesis, las potencias, etc. Igualmente el signo “-”, sobretodo cuando va colocado delante de un paréntesis o una fracción es fuente generadora de errores, tal como lo han expresado los estudiantes.

Igualmente, dentro de esta misma categoría, Socas (op.cit.) distingue los errores de procedimiento, entre los que señala la aplicación incorrecta o mal uso de la propiedad distributiva y los consabidos errores sistemáticos de la ley cancelativa.

Por otra parte, en cuanto a la categoría referente al trabajo personal para superar los errores, se pudo encontrar que este trabajo de superación es débil o deficiente, evidenciado en el hecho de que la mayoría de los estudiantes revelaron que no se detenían a pensar sobre el error, ni tampoco a indagar por qué hubo el fallo o porque simplemente, a veces, no se dan cuenta o no se percatan de ello. En otros casos, se hace presente el factor emocional, en donde el error es percibido en forma negativa, produciendo ira, vergüenza, frustración y, por ende, el estudiante muestra una cierta tendencia a ocultar el error, deshacerse de él, desvirtuarlo o soslayarlo.

Todo ello en contraste con una minoría que busca orientación, indaga, se asesora con el docente o con otros compañeros, pero sin realizar un trabajo sistematizado de superación como lo plantean las diversas investigaciones y estudios en educación matemática, en lo que a materia de estudio de los errores en matemática se refiere, los cuales proveen de variados métodos de tratamiento. Tal es el caso planteado por Mulhern citado por Rico (1995), el cual agrupa los diferentes métodos en cuatro categorías, entre las cuales se destaca la técnica del análisis de los tipos de errores cometidos, la cual implica una clasificación, un examen de cómo se desvían de la solución correcta y la realización de inferencias sobre cuales factores pudieron haber conducido al error.

En lo que respecta a la definición o concepción que tienen los estudiantes sobre el error, éstos lo conciben como:

- *Una tontería*
- *Una falla, algo fáctico*
- *Ciertas fallitas*
- *Puros detalles*
- *Algo que no hacemos bien*

- *Puras estupideces*
- *Son propiamente puros detalles*
- *Confusiones pequeñas de cosas que uno creía haber ya dominado*
- *Errores bobos*
- *Errores que antes no los había visto o que no los había tratado así tan puntualmente*
- *Un bloqueo*
- *Falta de ejercicio, de práctica, de estudio.*

Estas expresiones recogidas a lo largo de la experiencia de los encuentros didácticos y de los grupos focales, evidencian que los estudiantes perciben el error dentro de las dos primeras de las cuatro dimensiones semánticas aludidas por Torre (2004); a saber: como efecto destructivo y como efecto distorsionador. Las otras dos dimensiones son la constructiva y la creativa.

Bajo esta óptica de los estudiantes, el error se presenta como un resultado incontrolado del que no se puede esperar nada bueno y el cual lleva implícito un significado negativo, generador de estados de ansiedad y conciencia de culpabilidad. Pocos son los estudiantes que ven en el error una oportunidad para aprender. Esta percepción, obviamente, se deriva del papel que ha jugado la escuela y los profesores en el desarrollo académico de los alumnos; bien lo escribe Torre (op.cit) cuando expresa “la sanción del error en el aprendizaje ha acompañado la instrucción a lo largo de su prolongada historia” (p.63).

De acuerdo con este autor, en una pedagogía del error, el docente puede valerse del error en otros sentidos, tales como: análisis de las causas del error, adopción de una actitud comprensiva y no aprehensiva, proposición de situaciones o procesos para que el alumno los descubra, entre otros. El principio que subyace bajo esta perspectiva estriba en que “quien se equivoca en el proceso de aprendizaje no merece castigo sino explicación y aclaración”, (Torre, op.cit).

En otro orden de ideas, en lo que respecta a las percepciones de los estudiantes en torno a la matemática, emergió la categoría que, a efectos de este trabajo, se denominó Usos Prácticos. En este aspecto se encontró que particularmente las gráficas de las funciones reales le han servido de utilidad en otras disciplinas como la economía, para visualizar problemas de oferta y demanda, encontrándole así relación con *“cosas de la vida diaria”*; no obstante, otros estudiantes expresan que el tema de las funciones *“debería ser algo mas útil”* y consideran que en su carrera tiene poca o ninguna aplicación directa. Otros, situándose en el caso extremo, consideran que no existe ninguna utilidad ya que *“no las usan para nada”*; igualmente expresaron que *“los polinomios, ni nada de eso que hemos visto, eso se usa para nada”*.

Otra de las categorías que emergió en el discurso de los participantes en los grupos focales, relacionada con las percepciones de los estudiantes sobre la matemática, la conformó el interés que tienen los estudiantes por algunos contenidos. Así, éstos consideraron el tema de las funciones es un tema amigable y, las gráficas representan un punto de mayor interés; evidenciándose ello en expresiones de los propios actores tales como *“la mayoría se lleva bien con funciones”*, *“lo primero que me viene a la mente son las gráficas”*. No obstante, con cierta regularidad, se argumentó que las herramientas que le proporciona la lógica proposicional les permiten un mejor análisis de situaciones, por lo que también se han sentido identificados con el tema. Una minoría de estudiantes no manifestó interés alguno por algún contenido en especial.

Además de los usos prácticos y de los intereses según algunos contenidos, emergió la categoría referente a las expectativas que tiene los estudiantes en relación a la aplicabilidad de los contenidos relacionados e involucrados con el tema de las funciones reales. En este sentido, se identificó que los estudiantes piensan que a futuro verán los frutos por el empleo de las funciones reales y de las *“gráficas, más que todo”*, de que *“probablemente, más adelante, en su carrera, eso les ayude en algo”* porque si lo están viendo *“significa que tiene un propósito y que le podamos tener confianza...”*, *“más adelante es que levamos a ver un fin”*.

Estas expectativas puestas de manifiesto por los estudiantes, pone en evidencia la necesidad del estudiante de encontrarle sentido de utilidad inmediata a lo que están aprendiendo. El estudiante, al no encontrarle ese sentido, genera dificultades, bloqueos u obstáculos emocionales que se manifiestan en errores, tal como lo han señalado Socas (op.cit.) y Gómez (2000). En este sentido, sus expectativas van orientadas a encontrarle significado a lo que están aprendiendo o lo que van a aprender.

Por último, se identificó también en el discurso la percepción que tienen los sujetos sobre las funciones y el aprendizaje de la matemática. En este aspecto, perciben la asignatura, y por añadidura a las funciones, como una materia difícil, una obligación para aprender; sienten que todo lo que están aprendiendo en el curso es algo totalmente nuevo, en relación a lo que aprendieron en la secundaria, puesto de manifiesto a través de expresiones recogidas, tales como: *“cuando uno viene aquí se vuelve todo tan complicado”...“el profesor de bachillerato eso medio daba la clase...uno viene aquí y entonces pareciera que todo fuera nuevo pues”..*

Los estudiantes, en líneas generales, conciben a la asignatura y, por ende, a las funciones, como una materia que deberían pasar, pero no como una *“materia que hay que estudiar día a día”*. Consideran que *“los límites, las derivadas, funciones, son cosas que ya las viste, ya las pasaste, feliz por ti que las pasaste”*, que *“una vez que las pases más nunca las vas a utilizar en el ejercicio profesional”*.

Un inventario de situaciones erróneas encontradas

Retomando el contexto de la investigación, en la asignatura Introducción a la Matemática, previo al estudio de funciones, se estudia la teoría de conjuntos, para entrar en los conjuntos numéricos y establecer así una nivelación en diversos algoritmos y operaciones con números reales. Es allí donde se encuentra una fuente rica de situaciones erróneas para ser analizadas. Algunas de ellas detectadas, se

exponen a continuación, seguidas de las propias que corresponden al estudio de las funciones reales a nivel del curso.

Situación 1:

En este caso se requiere determinar por extensión el siguiente conjunto:

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} / \frac{x}{x^2 - 9} + \frac{3}{x^2 + 6x + 9} = \frac{2}{x + 3} \right\}$$

El estudiante procedió de la siguiente forma:

Handwritten student work for solving the equation:

$$\frac{x}{x^2 - 9} + \frac{3}{x^2 + 6x + 9} = \frac{2}{x + 3}$$

Factorization of the denominator: $x^2 + 6x + 9 = (x+3)(x-3)$ (Note: This is incorrect, it should be $(x+3)^2$). The student also notes $x_1 = -3$ and $x_2 = -3$.

The student then writes: $\frac{x}{(x+3)(x-3)} + \frac{3}{(x-3)} = \frac{2}{(x+3)}$ (Note: The denominator in the second term is incorrectly written as $(x-3)$).

Next, the student writes: $x+3 = 2(x-3)$, $x+3 = 2x-6$, $-2x+x+3-6=0$, $x-3=0$, $x=3$.

The final conclusion is: $A = \{3\}$.

Figura 1.

En este ejemplo se pueden observar dos tipos de errores diferentes y sistemáticos de las dos vertientes expuestas por Beyer y Cox. El primero de ellos, resulta de factorizar incorrectamente el polinomio $x^2 + 6x + 9$ como $x^2 - 9$; nótese en el lado izquierdo de la expresión anterior que a pesar de que ha obtenido la factorización verdadera como $(x+3)(x+3)$, persiste en el error, escribiendo iguales denominadores en el primer miembro de la ecuación, donde por añadidura tendría que $x^2 - 9$ resultaría igual a $x^2 + 6x + 9$. El segundo error se presenta cuando se determina

que el conjunto solución para la ecuación en referencia es $A = \{3\}$, aún cuando la solución $x = 3$ anula el denominador de la fracción $\frac{x}{x^2 - 9}$.

Este es un error sistemático muy frecuente, mostrado por diversos estudiantes, el cual encaja perfectamente dentro de la categorización propuesta por Movshovitz-Hadar y otros en 1987 referida como “solución no verificada”.

Situación 2:

Handwritten work showing the solution of a quadratic equation:

$$x = \frac{-6 \pm \sqrt{36+36}}{-2}$$

$$x = \frac{-6 \pm \sqrt{72}}{-2}$$

The student then incorrectly cancels the 6 in the numerator and denominator, resulting in:

$$x_1 = \frac{-6 + \sqrt{72}}{-2} = 3 + \sqrt{72}$$

$$x_2 = \frac{-6 - \sqrt{72}}{-2} = 3 - \sqrt{72}$$

A bracket labeled "Error (Revision)" points to the cancellation step. To the right, a circled note indicates $x \notin \mathbb{R}$.

Figura 2

Se observa como éste es un ejemplo del error clásico en la cancelación de la forma, descrito por Radatz como errores de asociación enmarcados dentro de la categoría “Errores debidos a asociaciones incorrectas o rigidez del pensamiento”; éste error se deriva de una transferencia negativa de la cancelación $\frac{a \cdot b}{a} = b$, $a \neq 0$. Por otra parte, Socas (op.cit), establece que estos errores son errores típicos, que denomina errores de cancelación, los cuales incluye dentro los errores de procedimiento inmersos, a su vez, en el eje categorizado como “Errores que tienen su origen en ausencia de sentido”.

Se observa además un error sistemático producido por no reconocer los valores de $x = 3 + \sqrt{72}$ y de $x = 3 - \sqrt{72}$ como números reales. Este tipo de error es reconocido

por Radatz dentro de la categoría de los errores producidos por la deficiente maestría con herramientas, hechos y conceptos los cuales son pre-requisito para un conocimiento dado. Así como también se evidencia un error que pudiera ser tipificable como error de descuido, tal como lo define Cox, al cambiar el signo de 3 en cada una de las expresiones de x anteriores.'

Situación 3:

En este ejemplo se requiere hallar el valor de x, y sabiendo que

$$\left(\frac{3}{x-2} + \frac{7}{x+2}, \frac{10y-7}{15y+3} \right) = \left(\frac{x+1}{x-2}, \frac{3y+8}{12} - \frac{5y^2-4}{20y+4} \right).$$

El procedimiento realizado por este estudiante para determinar el valor de “y” fue el siguiente:

Handwritten work showing the student's attempt to solve for y:

$$12 = 2^2 \cdot 3$$

$$20y + 4 = 4(5y + 1)$$

$$15y + 3 = 3(5y + 1)$$

$$4(10y - 7) = (5y + 1)(3y + 8) - [3(5y^2 - 4)]$$

$$40y - 28 = 15y^2 + 40y + 3y + 8 - [15y^2 - 12]$$

$$40y - 28 = 15y^2 + 40y + 3y + 8 - 15y^2 + 12$$

$$-28 = 3y + 8 - 12 = 0$$

The student also circled the number 1, indicating the final answer for y.

Figura 3

El error que aquí se presenta representa un error sistemático entre la población estudiantil; él mismo se suscita por descuido al eliminar el signo de agrupación precedido del signo menos; es decir que establece en líneas generales que: $-(a + b) = -a + b$ en lugar de $-(a + b) = -a - b$. Se clasifica éste en un error por

descuido, como lo establecen Cox, por una parte, y por otra, Brousseau (2001), en su categoría “Error en la tarea”, ya que se ha precisado que el estudiante conoce y aplica correctamente la propiedad distributiva de la multiplicación en vista de que los productos $4(10y - 7)$ y $(5y + 1)(3y + 8)$ fueron correctamente realizados, tal como se evidencia en la figura anterior. Al respecto Socas (1997), refiere que el signo “-”, sobre todo cuando va colocado delante de un paréntesis o de una fracción, genera frecuentes errores. Para Socas, el error en referencia obedece a su categorización alusiva a los “Errores que tienen su origen en ausencia de sentido”, específicamente en los “Errores del álgebra que tienen su origen en la aritmética”. Este tipo de error también se ilustra en la siguiente situación análoga.

Situación 4:

3)

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} / \frac{1}{4-x} - \frac{1}{6} = \frac{1}{x+1} \right\}$$

$$B = \left\{ x \in \mathbb{R} / x^3 + 11x^2 - 4x = 24 \right\}$$

Decida si $A \subset B$, $B \subset A$, $A = B$
errores en el uso de la simbología.

$$A = \frac{1}{4-x} - \frac{1}{6} = \frac{1}{x+1}$$

$$\text{mcm} = (4-x)(6)(x+1)$$

$$(6)(x+1) - [(4-x)(x+1)] = (4-x)(6)$$

$$6x+6 - [4x+4-x^2-x] = 24-6x$$

$$\rightarrow 6x+6 - 4x-4+x^2+x - 24+6x = 0$$

$$x^2 + 9x - 24 = 0 \rightarrow \text{revisa}$$

$$-9 \pm \sqrt{9^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-24)}$$

$$2.1$$

Figura 4

Tal como en el caso anterior, este error expresa que $6(x+1) = 6x+1$ en una incorrecta aplicación de la propiedad distributiva. Coincidiendo con Socas, la propiedad distributiva se constituye en una fuente permanente de errores, los cuales son tipificados por este investigador como “Errores de procedimiento” incluidos en la categoría “Errores que tienen su origen en ausencia de sentido”, señalada anteriormente.

Nótese además otro error presente, el cual se devela con suma frecuencia entre los estudiantes del curso y no obstante no se ha encontrado hasta ahora en la literatura

reportado por investigadores, como lo es: $A = \frac{1}{4-x} - \frac{1}{6} = \frac{1}{x+1}$ donde previamente se

ha establecido que $A = \left\{ x \in R / \frac{1}{4-x} - \frac{1}{6} = \frac{1}{x+1} \right\}$, evidenciándose dificultades para

establecer comparaciones entre objetos, de modo tal que el estudiante compara la distinta naturaleza de un conjunto con la de una ecuación. Probablemente este error surja de una incorrecta asociación de la propiedad que deben cumplir los elementos del conjunto A con el propio conjunto A, tal como lo establece Radatz o por una interpretación incorrecta o uso incorrecto del lenguaje simbólico como lo establecen el propio Radatz, Davis y Movshovitz-Hadar, Zaslavksy e Inbar.

Situación 5:

La siguiente situación tiene los mismos requerimientos de la situación descrita en 1, recuérdese que se trata de resolver la ecuación

$$\frac{x}{x^2-9} + \frac{3}{x^2+6x+9} = \frac{2}{x+3}, \text{ el estudiante ha procedido de la manera siguiente:}$$

(falta de sentido)

$$1) \frac{x^2}{3} + x \cdot 3 + 2x \cdot 3 + 9 = 2?$$

$$x^2 + 3x + 6x + 9 - 3 - 2 = 0$$

$$x^2 + 9x + 4 = 0 \text{ reverso}$$

$$x^2 - 9 = (x+3)(x-3)$$

$$x^2 + 6x + 9 = (x+3)(+3)$$

$x+3 = \text{m.c.m.}$

- 1) Factorización
- 2) reverso, cálculo del m.c.m.
- 3) uso de signos

Figura 5

Esta situación errónea es una evidencia de la presencia de un error de técnica (Brousseau y Movshovitz), un error que tiene su origen en la ausencia de sentido (Socas), debido a un aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos (Radatz) y un error debido a los procesos adoptados (Astolfi), por cuanto el alumno se ha apartado del método-tipo dado en la clase.

Situación 6:

El siguiente ejemplo se constituye en un error sistemático, tanto a nivel individual como colectivo (Beyer y Cox). Nótese que, habiendo determinado correctamente la expresión solicitada, ésta es denominada incorrectamente como $f(x)$, lo cual obviamente es un error que entra en las categorías de Socas, Movshovitz y de Radatz, ya que bien pudiera pensarse en una dificultad propia de falta de comprensión semántica que se traduciría en lo que este último investigador denomina “errores debidos a dificultades del lenguaje”. Obsérvese además otro error clásico como lo es el de la ya reportada ley de cancelación, incorrectamente empleada

en
$$\frac{\cancel{x^2} + \cancel{x} + h + \cancel{x} - \cancel{x^2} + h + \cancel{x} + h}{\cancel{x^2} + h} \text{ pero esta vez se presenta en un procedimiento}$$

inusual, no encontrado en la literatura correspondiente; obsérvese además, el error previo que deviene de la incorrecta aplicación de la propiedad distributiva de la

multiplicación, la cual con anterioridad ha sido reportada como una fuente permanente de errores.

El procedimiento y la secuencia empleada por el estudiante para la cancelación fue el siguiente:

$$x + h \text{ con } x + h$$

El exponente 2 de x con x , y por último

$$-x^2 + h \text{ del numerador con } x^2 + h \text{ del denominador}$$

Procedimiento éste que le conduce a obtener como resultado a $\frac{x}{h}$. Esta situación

errónea se ubica perfectamente dentro de la categoría de Socas como “errores del algebra que tienen su origen en la aritmética”, “errores de procedimiento” entre los que destacan “errores relativos al mal uso de la propiedad distributiva” y “errores de cancelación”. Astolfi por su parte, tipifica también este tipo de errores en “errores debidos a los procesos adoptados”.

2.- Dada la función f definida por:

$$f(x) = \frac{x+1}{x} \quad \text{Determine, en su mínima expresión a } \frac{f(x+h)-f(x)}{h}, \quad h \neq 0$$

Handwritten work showing the calculation of the difference quotient:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{\frac{x+h+1}{x+h} - \frac{x+1}{x}}{h} = \frac{\frac{x^2 + xh + x - x^2 - h}{x(x+h)h}}{h} = \frac{x}{h}$$

Figura 6

Situación 7:

El ejemplo que se muestra a continuación en la figura 7, ilustra por un lado, “errores debidos a un aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos” tal como lo señala Radatz, toda vez que el estudiante plantea erróneamente que para determinar el dominio de la función debería considerar que toda

$x \in Dom_f$ es tal que debe satisfacer la inecuación $2x + 4 \geq 0$. Por otro lado, note que establece que el valor de x que anula el denominador $x^2 - 9$ es solamente $x = 3$, el cual representa un error sistemático entre los diferentes estudiantes, quienes omiten el valor de $x = -3$, como una solución de la ecuación $x^2 - 9 = 0$.

Por otra parte note el procedimiento empleado para factorizar el polinomio $x^2 + 13x + 40$, mediante el cual el estudiante, aún cuando elige este largo camino, aplica correctamente la resolvente de la ecuación cuadrática a objeto de determinar sus raíces, no obstante factoriza incorrectamente. Este representa un error proveniente de la dificultad que muestran los estudiantes para establecer que la factorización es de la forma $(x - x_1)(x - x_2)$ con x_1 y x_2 las raíces de la ecuación en referencia.

Handwritten work showing the domain of a function f :

$$Dom f = \{x \in \mathbb{R} / 2x + 4 \geq 0\} \cap \{x \in \mathbb{R} / x^2 + 13x + 40 > 0\} \cap \{x \in \mathbb{R} / x^2 + 2x - 15 \geq 0\} \cap \mathbb{R} - \{3\}$$

Solving the first inequality:

$$Sol_1: 2x + 4 \geq 0$$

$$2x \geq -4$$

$$x \geq -\frac{4}{2}$$

$$x \geq -2$$

Solving the second inequality:

$$Sol_2: x^2 + 13x + 40 > 0$$

$$= \frac{-13 \pm \sqrt{(13)^2 - 4(1)(40)}}{2(1)}$$

$$= \frac{-13 \pm \sqrt{169 - 160}}{2} = \frac{-13 \pm 3}{2}$$

$$\left(\frac{-13+3}{2} = -5, \frac{-13-3}{2} = -8 \right)$$

Factorization (incorrectly written):

$$(x+5)(x+8) \quad (x-x_1)(x-x_2)$$

Final domain:

$$[-2, +\infty)$$

Figura 7

Situación 8:

Este mismo ejercicio fue desarrollado por otro estudiante quien ha procedido de la siguiente forma:

3.- Determine el dominio de la función definida por:

$$f(x) = \frac{2x+4}{\sqrt{x^2+13x+40} \cdot \sqrt{x^2+2x-15} \cdot x^2-9}$$

$x^2+13x+40 > 0$ $x^2+2x-15 \geq 0$ $x^2-9 \geq 0$

$(x+5)(x+8)$ $(x+5)(x-3)$ $x = \pm\sqrt{9}$

$S_1: x = -5, x = -8$ $S_2: x = -5, x = 3$ $S_3: x = \pm 3$

$x > -5$ $x > 3$

$S_3 = \mathbb{R} - \{-3, 3\}$

$\text{Dom: } (3, +\infty)$

Error de proced.

Figura 8

En este caso se muestra también otro error procedimental: se confunden ecuaciones con inecuaciones, presentándose “errores de técnica” (Brousseau), “errores que tienen su origen en la ausencia de sentido” (Socas), “error por definición deformada” (Movshovitz) y “error debido al proceso adoptado” (Astolfi). Nótese además el error al resolver la ecuación $x^2 - 9 = 0$ cuando expresa que $x = \pm 3$, el cual es reportado por Hernostroza (1997), y representa un caso típico de error derivado del mal uso de los símbolos y términos matemáticos, debido a su inadecuado aprendizaje; éste es categorizado por Movshovitz y Radatz como errores de lenguaje.

Situación 9:

El error que aquí se expone (figura 9) es un ejemplo de cómo las operaciones con fracciones son generadores de dificultades que se traducen en errores; probablemente el caso que aquí se muestra sea producto de errores del álgebra que tiene su origen en

la aritmética, en tanto que pueden derivarse de problemas que se quedan sin corregir en la aritmética (Socas). Nótese que el estudiante, por error de descuido, (Brousseau y Cox), omite a h , la cual es agregada por el docente tal como se ilustra en segunda línea de la figura; luego al aplicar la ley cancelativa, el numerador se convierte en 1,

resultándole $\frac{1}{(x+h)x}$ que el estudiante interpreta erróneamente como $\frac{(x+h)x}{h}$.

Ello representa una evidencia más de la complejidad que representan las fracciones para los estudiantes. Dorgan citado por Beyer, expresa que, debido a esta complejidad, se incluyen dentro de los conceptos menos entendidos por los alumnos.

$$\frac{(x+h)+1}{(x+h)} - \frac{x+1}{x} = \frac{x((x+h)+1) - (x+h)(x+1)}{(x+h)x}$$

$$\frac{x^2 + xh + x - x^2 - x - xh - h}{(x+h)x} = \frac{(x+h)x}{h} = \frac{x^2 + xh}{h} ?$$

$$= \frac{h}{xh(x+h)} \text{ revisar}$$

Figura 9

Situación 10:

En analogía a la situación descrita anteriormente en el ejemplo 6, la presente situación señala un error que encaja perfectamente dentro de las categorías de Davis, Movshovitz y de Radatz referente a los “errores debidos a dificultades de lenguaje”,

$f(x) = \frac{x+1}{x}$ Determine, en su mínima expresión a $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}, h \neq 0$

(f) $\left(\frac{x+1}{x} + h \right) - \frac{x+1}{x}, h \neq 0$

De qué se trata?

(f) $\left(\frac{x+1}{x} + \frac{h}{1} \right) - \frac{x+1}{x}$

(f) $\left(\frac{x+1}{x} + xh \right) - \frac{x+1}{x}$

(f) $\left(\frac{x^2+1}{x^2} + x^2h - \cancel{x^2 \cdot \frac{h}{1}} \right)$

(f) $\left(\frac{x^2 \cdot h}{x^2} \right)$ (f) $\left(\frac{x^2 \cdot h}{x^2/h} \right)$ (f) (1)

Por otra parte, obsérvese la dificultad que representa para el sujeto, la aplicación de la regla de correspondencia de la función, toda vez que expresa que:

Este tipo de errores, según Brousseau, se suscita por cuanto los conocimientos teóricos del alumno no sirven de base a la técnica empleada; no obstante, este mismo estudiante ha determinado correctamente a $f(2)$ como:

$$x = 2, \quad f(2) = \frac{2+1}{3} = \frac{3}{2}$$

La dificultad se presenta, según Davis citado por Socas (op.cit.), por la distinción entre la adición aritmética, donde “+” representa una pregunta o un problema (3+7) y la adición algebraica como en (x+h) donde la expresión describe, a la vez, la operación de sumar y el resultado. Davis sostiene que esto requiere del alumno “*un ajuste cognitivo*”, que denomina dilema proceso-producto.

Otros errores que se develan en la figura en referencia señalan que:

☒ $-\frac{x+1}{x} = -\frac{x-1}{x} = \frac{-x-1}{x}$ (segunda y tercera línea de la figura)

☒ El error de aplicar incorrectamente la ley distributiva en $-x(x-1) = -x^2 - 1$.

Errores éstos que ya han sido referidos con anterioridad y son reportados por Socas como “errores que tienen su origen en ausencia de sentido”, subcategorizados como “errores del álgebra que tienen su origen en la aritmética”, citados anteriormente y “errores de procedimiento” (mal uso de la ley distributiva).

Nótese además, que el estudiante no verifica la solución obtenida, por cuanto según éste el resultado es $f(1)$, siendo que, por un lado $f(1) = \frac{1+1}{1} = 2$ y, por otro, según la ejecución inicial propuesta tendría que:

$$\frac{\left(\frac{x+1}{x} + h\right) - \frac{x+1}{x}}{h} = 1, \text{ por lo que}$$

$$\left(\frac{x+1}{x} + h\right) - \frac{x+1}{x} = h, \text{ lo cual es curiosamente verdadero.}$$

Este tipo de error es clasificado por Movshovitz-Hadar, Zaslavsky e Inbar, como un “error por la falta de verificación en la solución”, dado que si el alumno hubiese contrastado la solución con el enunciado, el error hubiera podido evitarse.

Situación 11:

Análogamente, se evidencia nuevamente un error de lenguaje (Davis, Movshovitz y Radatz), en el presente caso:

The image shows a student's handwritten work for a limit problem. The problem statement at the top is: $f(x) = \frac{x}{x+1}$. Determine, in its simplest expression, $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$, $h \neq 0$. The student's work includes several errors circled in red:

- The function $f(x)$ is incorrectly written as $\frac{(x+h)+1}{(x+h)}$.
- The difference $f(x+h) - f(x)$ is incorrectly calculated as $\frac{(x+h)+1}{(x+h)} - \frac{(x+1)}{x}$.
- The common denominator is incorrectly found as $x(x+h)$.
- The numerator is incorrectly simplified to $x(x+h)+1 - (x+h)(x+1)$.
- The final result is incorrectly given as $xh(xh+h^2)$.

Figura 11

Nótese como $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ nuevamente es denominado como $f(x)$, representando ello un error sistemático, tanto a nivel individual (un mismo sujeto lo presenta reiteradas veces) como a nivel del colectivo (Beyer y Cox), en el uso del lenguaje simbólico. Con ello se evidencia, además, la dificultad que tienen los alumnos para comprender las instrucciones de trabajo dadas, por lo que este error entraría dentro de lo que Astolfi (2003) denomina “errores en la comprensión de instrucciones de trabajo dadas”.

Obsérvese, por otra parte, el error al multiplicar $x(x+h)$ por h , cuyo producto fue expresado como $xh(xh+h^2)$, el cual se constituye en un error por extensión de la propiedad distributiva de la multiplicación con relación a la adición (o sustracción) al caso de la multiplicación, tal como lo ha reportado Socas.

Nótese además que el estudiante finaliza con la siguiente ejecución:

$xh(xh + h^2) = xh + xh + h^2$ lo que representa un “error en los procesos adoptados” (Astolfi), un “error que tiene su origen en ausencia de sentido”(Socas), un “error debido a la aplicación de reglas o estrategias irrelevantes” (Radatz), un “error en la tarea” (Brousseau) y un “error debido al uso de teoremas o definiciones deformadas”(Movshovitz).

Situación 12:

En este caso se le ha planteado al estudiante trazar la gráfica de la función definida

$$\text{por } f(x) = \begin{cases} x - 2 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ x^2 + 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

La ejecución que el estudiante plantea es la siguiente:

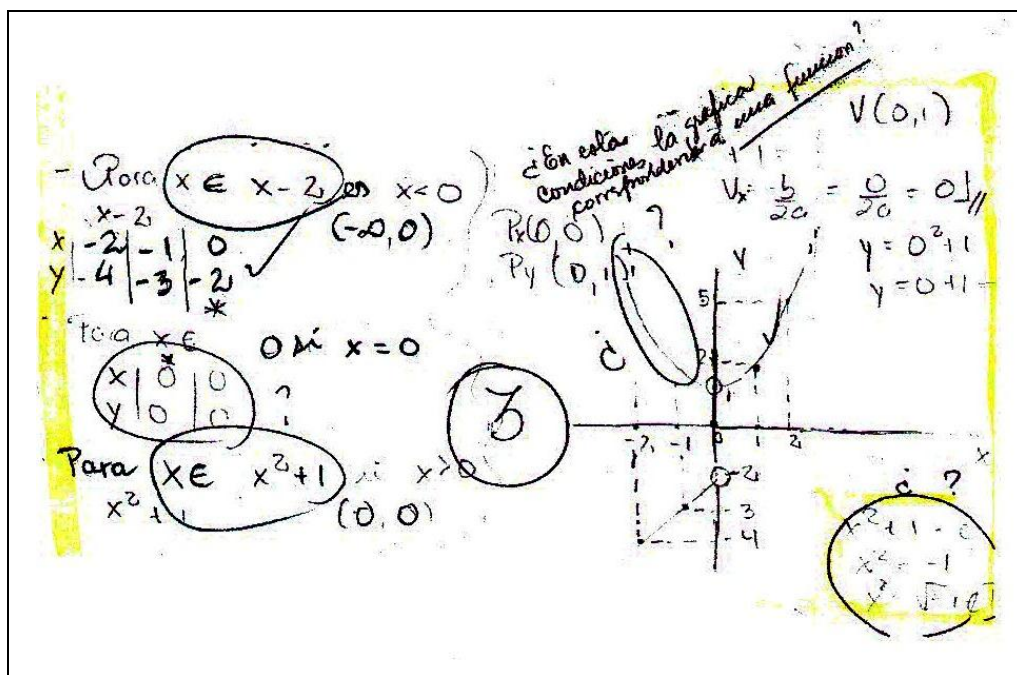


Figura 12

El alumno reconoce el tipo de gráfica que se obtendría en cada uno de los intervalos precedentes; no obstante presenta dificultades de lenguaje cuando expresa: $x \in x - 2$, $x \in 0$, $x \in x^2 + 1$ e igualmente para representar, en conjunto, la función; es decir para integrar la gráfica de la función una vez que se han analizado los subconjuntos que determinan la partición del dominio. Este tipo de error es categorizado por Radatz como “errores debidos a dificultades para obtener información espacial”.

Nótese, además, que si el estudiante hubiese verificado la gráfica resultante, probablemente hubiera podido darse cuenta que la gráfica obtenida no se corresponde con la grafica de una función (“Error por falta de verificación en la solución”, Movshovitz-Hadar, Zalavsky e Inbar).

Obviamente, éste también representa un error por falta de conocimientos teóricos (“Error de nivel teórico”, Brousseau) o debido a un “aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos” (Radatz).

Situación 13:

La siguiente situación, análogamente a lo descrita anteriormente en las situaciones 6, 10 y 11, reitera los “errores debidos a dificultades de lenguaje” (Davis, Movshovitz y de Radatz), en tanto que es sistemático el error de confundir a $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ con $f(x)$, por una parte. Brousseau, Davis y Werner, citados por Rico (1995), establecen al respecto que “se hace evidente que los errores de los alumnos son, con frecuencia, el resultado de un procedimiento sistemático que tiene alguna imperfección; pero el procedimiento imperfecto lo utiliza el alumno de modo consistente y con confianza. En estos casos los errores muestran un patrón consistente”. En la experiencia vivida con los estudiantes por la aplicación de la técnica de los grupos focales, se pudo evidenciar que los alumnos hacen alusión a este tipo de errores como un error

“permisible” ya que a pesar de las observaciones hechas por el docente, no se les “penaliza” por este concepto.

6.- Dada la función definida por $f(x) = -2x^2 - 5x + 3$, determine, en su mínima expresión: $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$, $h \neq 0$ (Valor: 4 Ptos.)

$f(x) = (-2x^2 - 5x + 3) + h - (-2x^2 - 5x + 3) - (-2x)^2 + 2(-2x - 5x + 3 + h) + (-5x + 3 + h)^2 - (-2x^2 - 5x + 3)$
 $= \frac{4x^2 - 4x - 10x + 6 + 2h + 25x^2 + 9 + h^2 + 2x^2 - 5x + 3}{h} =$

Figura 13

Por otra parte, nótese la dificultad que representa para el alumno la aplicación de la regla de correspondencia de la función a situaciones algebraicas, hecho reportado anteriormente en otras situaciones similares. Nótese además la incorrecta aplicación de la ley cancelativa, evidenciándose una vez más errores que se incluyen en la tipología de Socas, dentro de la categoría “Errores que tienen su origen en ausencia de sentido”, tanto en la subcategoría “Errores de procedimiento (Errores de cancelación)” como en la subcategoría, “Errores del álgebra que tienen su origen en la aritmética”. Booth, por su parte, establece al respecto que la mayoría de los errores de los estudiantes que presentan en el álgebra, obedecen a dificultades y errores que presentan en el campo de la aritmética, puestos en evidencia por las dificultades en la interiorización de los conceptos.

En un intento por comprender o descifrar el procedimiento empleado por el estudiante, obsérvese como en un primer momento éste confunde $f(x+h)$ con $f(x) + h$. En el resto de la ejecución se hizo imposible encontrar el procedimiento o la técnica empleada por el estudiante.

Situación 14:

Caso que presenta analogía con la situación anterior, por la falta de sentido que éste evidencia. Obsérvese como una ecuación es convertida en dos, como se obtiene una solución no verificada ($x = 2$ anula el primer denominador en cada una de las primeras componentes de los pares ordenados).

3.-Hallar el valor de x , y sabiendo que:

$$\left(\frac{3}{x-2} + \frac{7}{x+2}, \frac{10y-7}{15y+3} \right) = \left(\frac{x+1}{x-2}, \frac{3y+8}{12} - \frac{5y^2-4}{20y+4} \right) \quad (\text{Valor: 4 Ptos.})$$

Handwritten work for the first component:

$$\frac{3}{x-2} + \frac{7}{x+2} = \frac{x+1}{x-2}$$

$$3(x+2) + 7(x-2) = (x+1)(x-2)$$

$$3x+6+7x-14 = x^2-2x+x-2 = 0$$

$$10x-8 = x^2-x-2 = 0$$

$$10-8=x \Rightarrow x=2$$

Handwritten work for the second component:

$$\frac{10y-7}{15y+3} = \frac{3y+8}{12} - \frac{5y^2-4}{20y+4}$$

$$(10y-7)(15y+3) = (3y+8)(5y+1) - (5y^2-4)(5y+1)$$

$$150y^2+30y-105y-21 = 15y^2+15y-20y^2-5y-25y^2-25y-4y-4$$

$$150y^2+30y-105y-21 = -10y^2-34y-4$$

$$160y^2+64y-17 = 0$$

$$y = \frac{-32 \pm \sqrt{1024-1104}}{160}$$

Handwritten notes:

- ¿Cuál es el m.c.m. entre los denominadores?
- revisar
- revisar

Figura 14.

Por otra parte, nótese el procedimiento empleado por alumno para resolver la ecuación que se deriva de comparar las segundas componentes, el cual entraña una dificultad para el cálculo del mínimo común múltiplo entre polinomios y, por ende la factorización de polinomios. Dificultades éstas que son una fuente de errores sistemáticos (Beyer y Cox), que derivan en errores del álgebra que tienen su origen en la aritmética (Socas y Booth).

Situación 15:

Análogamente, la siguiente situación muestra, en el lado derecho, la dificultad que representa el cálculo del mínimo común múltiplo entre polinomios. El error se deriva de la incorrecta factorización y del manejo teórico del concepto del mínimo común múltiplo.

3.-Hallar el valor de x, y sabiendo que:

$$\left(\frac{3}{x-2} + \frac{7}{x+2} - \frac{10y-7}{15y+3}\right) = \left(\frac{x+1}{x-2} - \frac{3y+8}{12} - \frac{5y^2-4}{20y+4}\right) \quad (\text{Valor: 4 Ptos.})$$

factor común

Partición

$$\frac{3}{x-2} + \frac{7}{x+2} = \frac{x+1}{x-2}$$

$$\frac{3(x+2) + 7(x-2)}{(x-2)(x+2)} = \frac{x+1}{x-2}$$

$$3x+6+7x-14 = (x+2)(x+1)$$

$$3x+6+7x-14 = x^2+x+2x+2$$

$$3x+6+7x-14 = x^2+3x+2$$

$$3x+7x-3x-x^2 = 3+14-6 \Rightarrow 7x-x^2 = 11$$

¿Qué haces?
Es una ec. de 2º grado!

$$x-x^2 = 11$$

$$x-x^2 = \frac{11}{1}$$

$$x = \frac{11}{1}$$

$$\frac{10y-7}{15y+3} = \frac{3y+8}{12} - \frac{5y^2-4}{20y+4}$$

$$\frac{10y-7}{3(5y+1)} = \frac{3y+8}{12} - \frac{5y^2-4}{4(5y+1)}$$

$$\frac{10-7}{3(5y+1)} = \frac{(5y+1)(3y+8) - 3(5y^2-4)}{12}$$

$$10-7 = 18y^2+40y+3y+8-15y^2+12$$

$$40y+3y = 10-7-8-12$$

$$43y = -17$$

$$y = \frac{-17}{43}$$

Figura 15.

En el lado izquierdo de la figura, el error se presenta por falta de reconocimiento de la ecuación de segundo grado $7x - x^2 = 11$ y, por ende se incurre en el error de procedimiento en ambos casos (Socas), error en la tarea (Astolfi y Brousseau), error debido a la falta de verificación (Movshovitz) y errores debido a un aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos (Radatz).

Situación 16:

La siguiente situación que se muestra en la figura a continuación, es un ejemplo más de lo que Socas advierte cuando señala que el signo “-”, sobretodo cuando va colocado delante de un paréntesis o de una fracción, genera frecuentes errores y de como además la ley cancelativa aplicada es una fuente permanente de errores.

Apréciase que el alumno ha hecho la siguiente cancelación: $\frac{\cancel{h}(2h+4x+5)}{\cancel{h}}$

cancelando, presumiblemente, $-h$ con h .

6.- Dada la función definida por $f(x) = -2x^2 - 5x + 3$, determine, en su mínima expresión: $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$, $h \neq 0$ (Valor: 4 Ptos.)

$$= \frac{-2(x+h)^2 - 5(x+h) + 3 - [-2x^2 - 5x + 3]}{h}$$
$$= \frac{-2(x^2 + 2xh + h^2) - 5x - 5h + 3 + 2x^2 + 5x - 3}{h}$$
$$= \frac{-2x^2 - 4xh - 2h^2 - 5x - 5h + 3 + 2x^2 + 5x - 3}{h}$$
$$= \frac{-2h^2 - 4xh - 5h}{h} = -2h - 4x - 5$$

$h \neq 0$

$3,5$

$\rightarrow$ ¿Qué paso con el signo?

Situación 17:

Nuevamente se ha encontrado en el presente caso una dificultad en la factorización de los polinomios denominadores en el lado derecho de la ejecución presentada por el estudiante. Los factores 3 y 4 fueron agregados por el docente, para mostrarle al alumno el error. Caso evidente de cómo la ley distributiva es generadora de errores en los estudiantes (Socas).

Situación 18:

En analogía con la situación descrita en 16, el alumno no reconoce la ecuación $1 - x^2 + 7x = 10$ como una ecuación de segundo grado, aplicando un procedimiento *sui géneris* para la resolución de dicha ecuación. Se observa, con este ejemplo, como el estudiante se desvía de los métodos –tipo dados en clase (Astolfi), como aplica una estrategia que probablemente en otros contextos ha resultado exitosa y como muestra deficiencias en contenidos y procedimientos específicos (errores debido a la aplicación de reglas o estrategias irrelevantes y errores por aprendizaje deficiente de procedimientos matemáticos, Radatz).

Handwritten student work for Situation 18. The problem is: "3.- Hallar el valor de x, y sabiendo que: $\left(\frac{3}{x-2} + \frac{7}{x+2}, \frac{10y-7}{15y+3}\right) = \left(\frac{x+1}{x-2}, \frac{3y+8}{12} - \frac{5y^2-4}{20y+4}\right)$ (Valor: 4 Ptos.)". The student's solution is as follows:

Handwritten notes: "Hacer a dos conjuntos distintos".

$$\left(\frac{3}{x-2} + \frac{7}{x+2} = \frac{x+1}{x-2}\right) \wedge \left(\frac{10y-7}{15y+3} = \frac{3y+8}{12} - \frac{5y^2-4}{20y+4}\right)$$

m.c.m. = $(x+2)(x-2)$

$$3(x+2) + 7(x-2) = x(x+2) + 1(x+2)$$
$$3x + 6 + 7x - 14 = x^2 + 2x + x + 2$$
$$3x + 7x - x^2 - 2x - x = 2 - 6 + 14$$
$$1 - x^2 + 7x = 10 \rightarrow \text{Es una ec. de 2º grado}$$

Handwritten note: "¿cómo se resuelve?"

$$x^2 = 10$$
$$x = \sqrt{\frac{10}{1}}$$

Figura 18.

Situación 19:

En la situación que se describe mediante la figura 19 anterior, hace presumir que el alumno presenta dificultades en la aplicación de la ley distributiva; no obstante, si se observa el lado derecho de la ejecución puede evidenciarse todo lo contrario, razón por la cual se puede categorizar éste como un error por descuido en el desarrollo de la tarea tal como lo señala, en su tipología, Brousseau.

3.-Hallar el valor de x, y sabiendo que:

$$\left(\frac{3}{x-2} + \frac{7}{x+2} - \frac{10y-7}{15y+3} \right) = \left(\frac{x+1}{x-2} - \frac{3y+8}{12} - \frac{5y^2-4}{20y+4} \right) \quad (\text{Valor: 4 Ptos.})$$

Handwritten solution:

$$\left(\frac{3}{x-2} + \frac{7}{x+2} - \frac{x+1}{x-2} \right) \wedge \left(\frac{10y-7}{3(5y+1)} = \frac{3y+8}{12} - \frac{5y^2-4}{4(5y+1)} \right)$$

$$3(x+2) + 7(x-2) - (x+1)(x+2) = x^2 + x + 2 + x + 2$$

$$3x+6+7x-14 = x^2 + x + 2 + x + 2$$

$$10x-8 = x^2 + 2x + 4$$

$$40y-28 = 75y^2 + 40y + 3y + 8 - 15y^2 + 12$$

$$40y-28 = 40y - 3y + 8 + 2$$

$$40y-28 = 37y + 20$$

$$40y-37y = 20+28$$

$$3y = 48$$

$$y = \frac{48}{3}$$

$$y = 16$$

Handwritten circled '2' and 'revisar'.

Figura 19.

Situación 20:

Los errores que se muestran en el siguiente caso, según se ilustra en la figura a continuación, ratifica lo expuesto por Socas en relación a las dificultades que produce en los estudiantes la presencia del signo “-” cuando precede a un símbolo de agrupación y la aplicación de la propiedad distributiva.

6.- Dada la función definida por $f(x) = -2x^2 - 5x + 3$, determine, en su mínima expresión: $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$, $h \neq 0$ (Valor: 4 Ptos.)

Handwritten solution:

$$f(x) = -2x^2 - 5x + 3$$

$$f(x+h) - f(x) = -2(x+h)^2 - 5(x+h) + 3 - (-2x^2 - 5x + 3)$$

$$= -2(x^2 + 2xh + h^2) - 5x - 5h + 3 + 2x^2 + 5x - 3$$

$$= -2x^2 - 4xh - 2h^2 - 5x - 5h + 3 + 2x^2 + 5x - 3$$

$$= -4xh - 2h^2 - 5h$$

$$\frac{-4xh - 2h^2 - 5h}{h} = -4x - 2h - 5$$

Handwritten circled '2' and 'revisar'.

Figura 20.

Situación 21:

En el ejemplo siguiente se muestra un error producido por las dificultades que tienen los estudiantes en el manejo de las fracciones (Soccas), nótese además el error de lenguaje al expresar $\frac{3+7}{x-2} = \frac{x+1}{x-2}$, lo cual obviamente carece de sentido (Socas y Radatz).

3.- Hallar el valor de x, y sabiendo que:

$$\left(\frac{3}{x-2} + \frac{7}{x+2} \right) \cdot \frac{10y-7}{15y+3} = \left(\frac{x+1}{x-2} + \frac{3y+8}{12} - \frac{5y^2-4}{20y+4} \right) \quad (\text{Valor: 4 Ptos.})$$

Handwritten work shows the student incorrectly simplifying the left side to $\frac{3+7}{x-2} = \frac{x+1}{x-2}$, which is circled. Below this, they write $10-1=x$ and $9=x$. The right side is also simplified incorrectly, with terms like $\frac{10y-7}{15y+3}$ and $\frac{3y+8}{12}$ being handled separately. The student identifies common factors (Factor Común 3 and 2) and performs a series of calculations, including $10y-7=15y+8-5y^2-4$ and $10y-15y+5y^2=8-4-7$, leading to $-5y+5y^2=-3$. The final result is $x=9$.

Figura 21.

Situación 22:

De acuerdo con Torre y Booth, los errores que en esta figura se muestran, son producidos por una mala comprensión de los principales términos del problema, lo que ha conducido al estudiante a una elección de procedimientos o fórmulas inadecuadas. Obsérvese como el alumno aplica incorrectamente la igualdad de pares ordenados (Radatz), como emplea un procedimiento que se aparta por completo de lo que en clase se ha desarrollado (Astolfi) y como muestra un aprendizaje deficiente de conceptos previos (Radatz, Movshovitz y Brousseau) al no aplicar la propiedad de la igualdad de pares ordenados.

3.- Hallar el valor de x, y sabiendo que:

$$\left(\frac{3}{x-2} + \frac{7}{x+2} \cdot \frac{10y-7}{15y+3} \right) = \left(\frac{x+1}{x-2} \cdot \frac{3y+8}{12} - \frac{5y^2-4}{20y+4} \right) \quad (\text{Valor: 4 Ptos.})$$

Handwritten solution for Figure 22:

$$\left(\frac{3}{x-2} + \frac{7}{x+2} \cdot \frac{x+1}{x-2} \right) = \left(\frac{10y-7}{15y+3} \cdot \frac{3y+8}{12} - \frac{5y^2-4}{20y+4} \right)$$

$$7(x+1) = 3(x-2)$$

$$7x+7 = 3x-6$$

$$7x-3x = -6-7$$

$$4x = -13$$

$$x = -13/4$$

$$x = -17/1$$

Figura 22.

Situación 23:

En el siguiente ejemplo:

3.- Determine el dominio de la función definida por:

$$f(x) = \frac{2x+4}{\sqrt{x^2+13x+40}} - \frac{\sqrt{x^2+2x-15}}{x^2-9}$$

Handwritten solution for Figure 23:

Domain of $f(x)$ is $\mathbb{R} \setminus \{x \mid 2x+4=0 \vee x^2+13x+40=0 \vee x^2+2x-15=0 \vee x^2-9=0\}$

Solving $2x+4=0$: $2x=-4 \Rightarrow x=-2$

Solving $x^2+13x+40=0$: $(x+8)(x+5)=0 \Rightarrow x=-8, -5$

Solving $x^2+2x-15=0$: $(x-3)(x+5)=0 \Rightarrow x=3, -5$

Solving $x^2-9=0$: $(x-3)(x+3)=0 \Rightarrow x=3, -3$

Domain of f is $\mathbb{R} \setminus \{-2, -8, -5, 3, -3\}$

Notación: $\text{Dom } f = (-\infty, -8) \cup (-8, -5) \cup (-5, -3) \cup (-3, 3) \cup (3, \infty)$

Figura 23.

Obsérvese las siguientes situaciones erróneas:

1. Denominación del dominio de la función como $f(x)$ en lugar de Dom_f , (error de lenguaje, Radatz, Davis y Movshovitz).

2. Establecimiento conceptual del dominio de la función (error de planteamiento y de conceptos, Torre y Radatz).
3. Considerar el numerador $2x + 4$ como elemento restrictivo, (error por definiciones deformadas, Movshovitz; error por aprendizaje deficiente de conceptos previos o error de nivel teórico, Brousseau y Radatz).
4. Confundir inecuaciones con ecuaciones (error por definiciones deformadas, Movshovitz; error por aprendizaje deficiente de conceptos previos o error de nivel teórico Brousseau y Radatz).
5. Uso incorrecto de la simbología, nótese por ejemplo como expresa que $Dom_f = \square \{-2\}$ y $S_1 = \{-2, \infty\}$ mostrando además deficiencias teóricas en operaciones con conjuntos y dificultades en cuanto al uso de los corchetes y los paréntesis.
6. Nótese la no verificación del resultado ya que ha encontrado cuatro dominios diferentes para la función, (error debido a la falta de verificación de la solución de Movshovitz).

Situación 24:

En el siguiente ejemplo, se presenta una situación de error sistemático en lo que a la aplicación de la regla de Ruffini se refiere. En este caso se requiere del estudiante determinar el dominio de la función racional definida por:

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^4 - 15x^2 - 10x + 24}; \text{ para lo cual el alumno procede de la forma siguiente, tal}$$

como lo ilustra la figura:

Handwritten student work showing synthetic division for the polynomial $x^4 - 15x^2 - 10x + 24$. The student lists potential roots: $X = -4$, $X = 2$, $X = 3$, and $X = -1$. They perform synthetic division for $X = -4$, $X = 2$, and $X = 3$. The final result is $DP = \{-4, -1, 2, 3\}$, with "revisar" (check) written next to it.

Figura 24.

En líneas generales los estudiantes tienen una tendencia a cambiar el signo de las raíces que obtienen cuando aplican esta regla, por cuanto tienden a confundir la obtención de éstas del proceso de factorización del polinomio, que en este caso resultaría como:

$x^4 - 15x^2 - 10x + 24 = (x + 2)(x + 3)(x - 1)(x - 4)$. Este tipo de error se suscita cuando el estudiante aplica, sin sentido alguno y de forma mecánica, algoritmos o procedimientos, que en la mayoría de los casos son propiciados por el método que el docente emplea en clase. En este sentido Beyer (op.cit.), señala que la enseñanza de la asignatura no puede reducirse a la “mera presentación y ejercitación de algoritmos sin una base conceptual. No puede presentarse la matemática como una estéril “sacadera de cuentas”. El docente debe discutir con sus alumnos los aspectos conceptuales que subyacen a los algoritmos e indagar la posibilidad de que existan otros algoritmos, etc.”

Específicamente, en el caso en discusión, el docente debe recordar al alumno las condiciones iniciales en las cuales se aplica la regla en cuestión, como lo es el cálculo

del cociente y el resto de la división del polinomio entre otro de la forma $(x + a)$ ó $(x - a)$ con $a \in \mathbb{Q}$ y, recordar el concepto de raíz o ceros de un polinomio.

Análogamente se evidencia lo antes señalado con los siguientes ejemplos:

The image shows handwritten mathematical work on lined paper. At the top, it says "yafase" and shows the polynomials $X^2 + 1$ and $X^4 - 15X^2 - 10X + 24$. Below this is a series of synthetic division steps. The first division is by -2 , resulting in a remainder of -24 . The second division is by 4 , resulting in a remainder of 0 . The third division is by 1 , resulting in a remainder of 3 . The fourth division is by -3 , resulting in a remainder of 0 . A circled 3 is written to the right of the third division. Below the divisions, there is a circled expression $\text{Domf} = \mathbb{R} - \{-4, -1, 2, 3\}$ with a question mark and the text "¿Qué hacen?". An arrow points from this expression to the text "sustituyan x por $-4, -1, 2, 3$ a si arribala a $X^4 - 15X^2 - 10X + 24$ ".

Figura 25.

3) $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^4 - 15x^2 - 10x + 24} \neq 0$

$f(x) = \frac{x^2 + 1}{(x-1)(x+2)(x-4)(x+3)}$

Domf = $\mathbb{R} - \{-4, -1, 2, 3\}$

¿Qué hacen?
¿Por qué se cambiaron el signo?

3

1	0	-15	-10	24
1	1	1	-14	-24
-2	2	2	24	0
1	-1	-12	0	
4	4	12		
1	3	0		
-3	-3			
1	0			

$(x-1)(x+2)(x-4)(x+3)$

Figura 26.

Situación 25:

El siguiente se constituye en un ejemplo que ilustra la persistencia y sistematicidad del error:

✓ ✓ ✓

$$Q = (-1)^2 + 2(-1) + 1 \Rightarrow 1 - 2 + 1 = 0$$

Figura 27.

En este caso representado por un error de lenguaje que proviene de la dificultad de emplear el lenguaje específico de la matemática, que se aparta de lo convencional (Torre, Radatz, Davis y Movshovitz). Lo curioso del caso está en el hecho del empleo indiscriminado del símbolo " $\Rightarrow$ " de la implicación lógica en lugar del signo "=" de igualdad, el cual es reportado en diferentes estudiantes y en repetidas de veces por un mismo estudiante, siendo que la primera unidad del programa que se desarrolla en el curso, contexto de este estudio, contempla un apartado de implicación lógica.

Situación 26:

En los dos ejemplos siguientes se ilustran algunos errores y dificultades confrontados al graficar la función definida por $f(x) = \frac{x^3 + 5x^2 - 6x - 30}{x + 5}$.

En el primero de los dos casos el alumno reconoce la indeterminación que presenta la función con el denominador $x + 5$, no obstante no visualiza el Dom_f . Nótese además, la dificultad para representar la función resultante (figura 28).

En el segundo de los casos, (figura 29) obsérvese como erróneamente la gráfica resulta ser una recta. En ambos casos, el estudiante está confrontando dificultades para obtener información espacial (Radatz), que lo conlleva a los errores ilustrados. Se muestran, además, errores por definiciones deformadas, (Movshovitz), errores por aprendizaje deficiente de conceptos previos o errores de nivel teórico (Brousseau y Radatz).

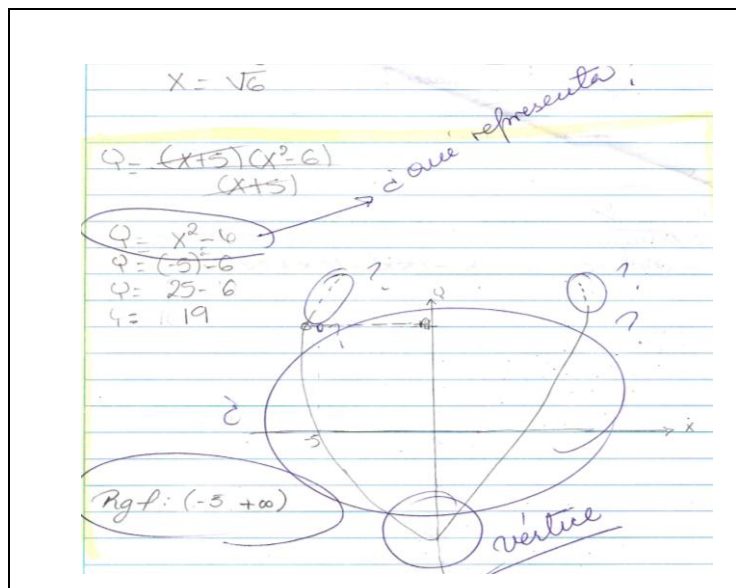


Figura 28.

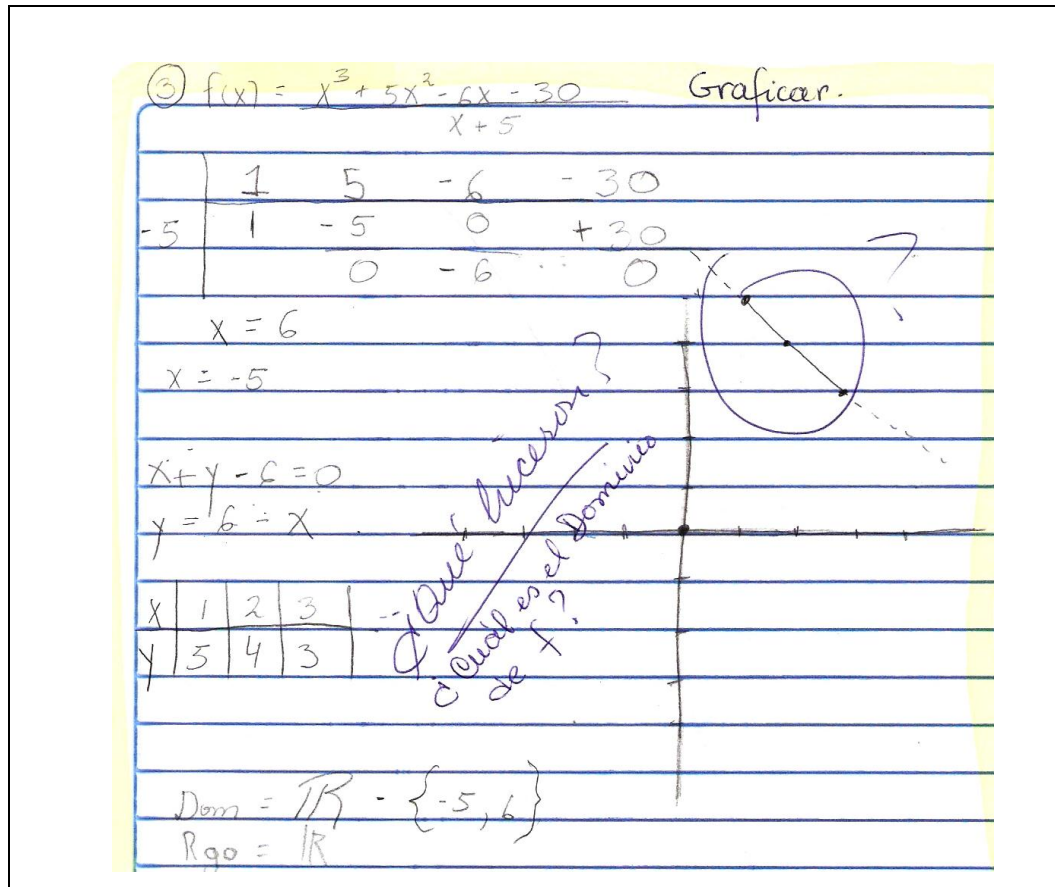


Figura 29.

Situación 27:

La situación precedente se ve reforzada en cada uno de los siguientes ejemplos, donde se evidencian dificultades para obtener información espacial o visual. Al estudiante, en este primer caso, se le solicitó obtener la gráfica de la recta que pasa por el punto (4,-2) y el vértice de la parábola $y = x^2 + 2x + 1$

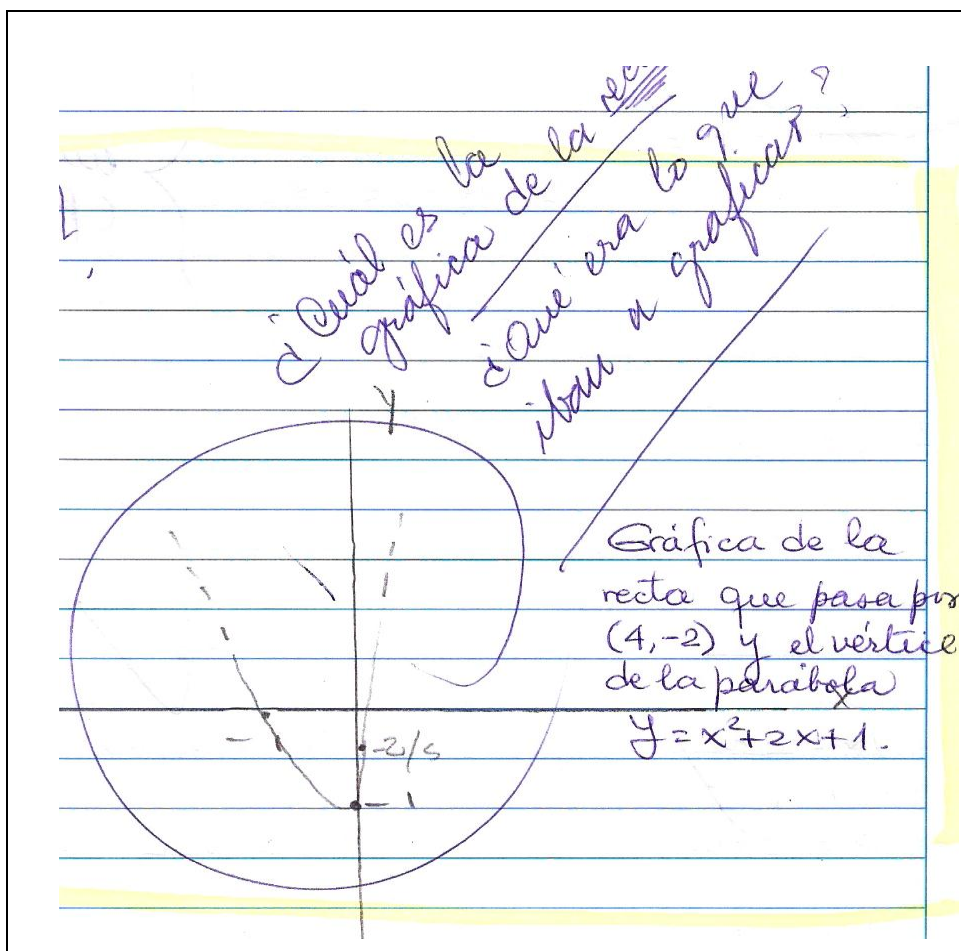


Figura 30.

Al respecto, Torre (op.cit.) establece que uno de los errores típicos en el aprendizaje de la matemática es el producido por una inadecuada percepción de aquello que se pide en el problema o en la tarea y que tal fallo puede derivarse de una lectura precipitada del estudiante, pasando por alto ciertos datos. Posteriormente el alumno suele caer en cuenta de este tipo de errores una vez que lo comenta entre sus compañeros.

En la siguiente figura 31, el estudiante reconoce el tipo de función y el tratamiento o procedimiento a seguir para graficar una función a trozos o por intervalos; visualiza correctamente que parte de la función ha de representar en cada uno de los intervalos

del Dom_f , no obstante pierde el sentido de orientación en el momento de integrar la información y no revisa la gráfica obtenida, la cual obviamente no corresponde a la de una función, evidenciándose con ello un error por falta de verificación en la solución, tal como lo señalan Movshovitz-Hadar, Zalavsky e Inbar.

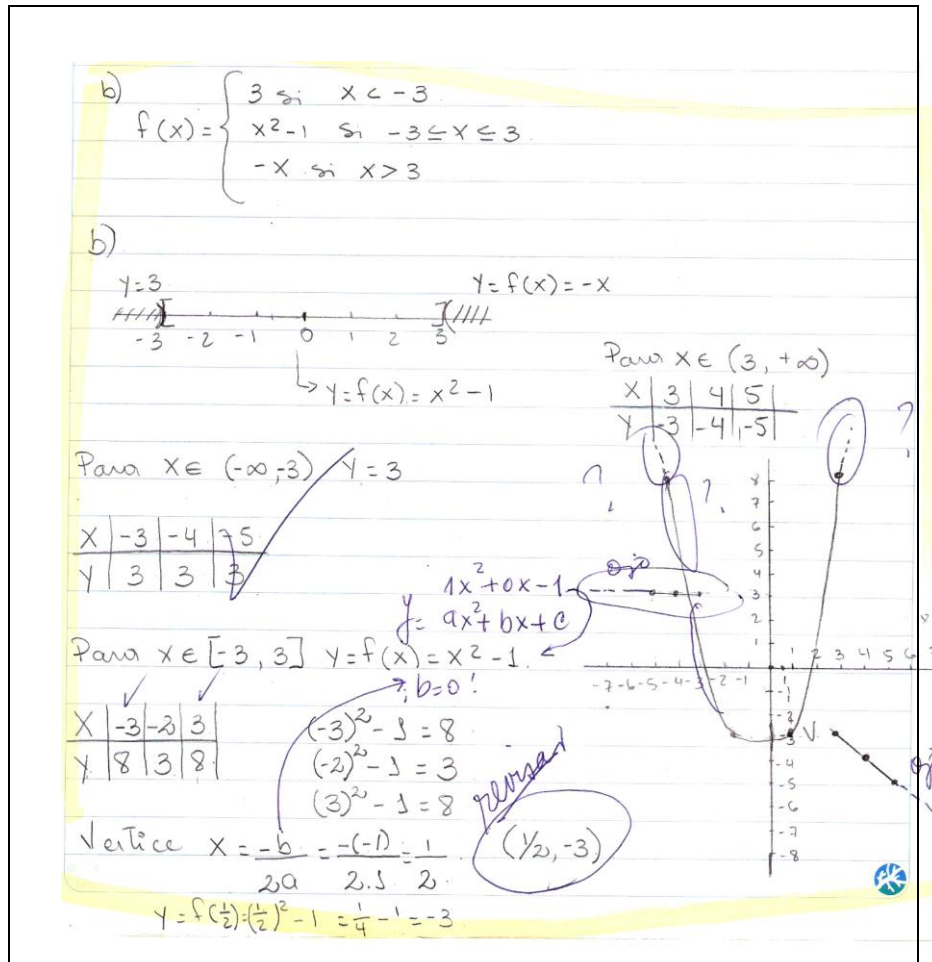


Figura 31.

En la figura 32, se muestra otro ejemplo realizado por otro estudiante del problema que el docente ha planteado en clase, se advierte que la gráfica bosquejada en el lado derecho obedece a correcciones *in situ* que el docente ha realizado para ilustrarle al estudiante la respectiva retroinformación.

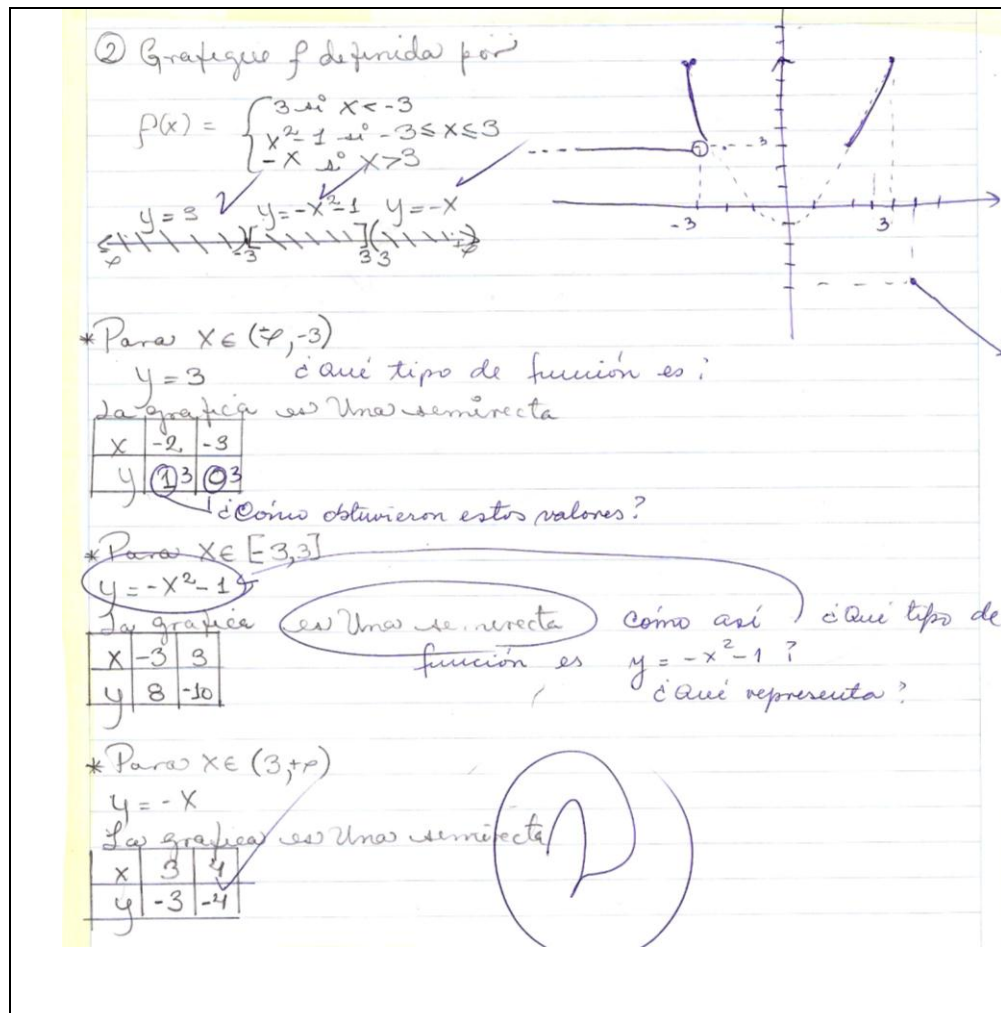


Figura 32.

Y la siguiente gráfica, figura 33, ilustra la respuesta del estudiante al problema planteado.

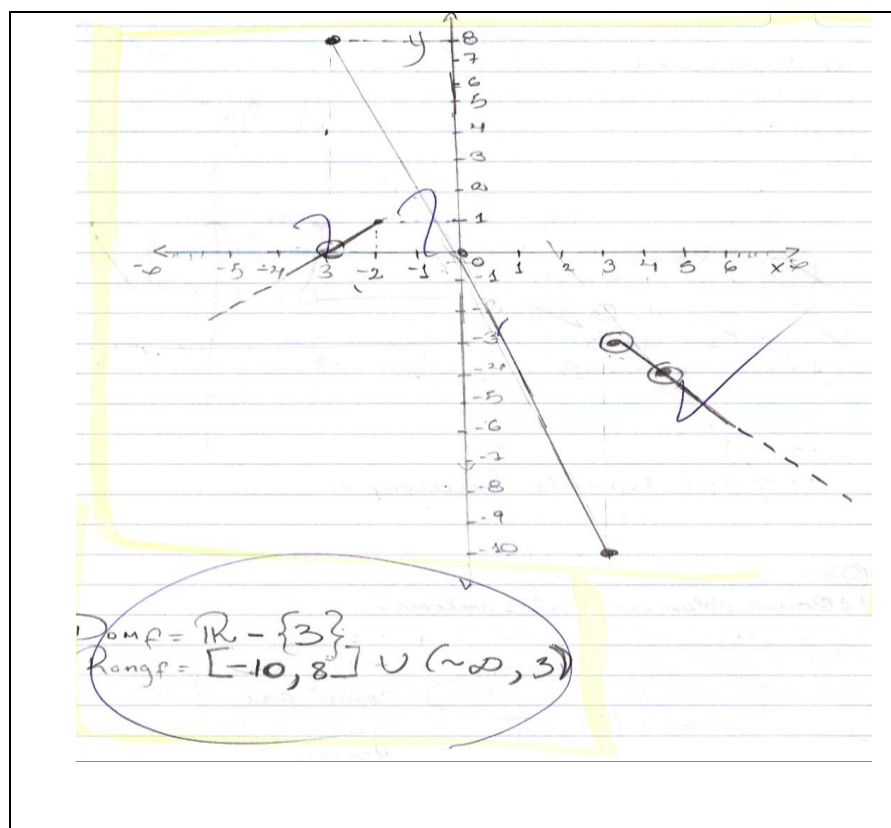


Figura 33.

CAPITULO V

CONCLUSIONES Y RECOMEDACIONES

*"El error no es un efecto del pensamiento
sino el testigo inevitable de un proceso de búsqueda!"*
Martinand

Conclusiones

Es importante aclarar que con este enfoque no se han pretendido realizar mayores generalizaciones en función de los hallazgos encontrados, sino que, más bien se ha aspirado ofrecer resultados y sugerencias para motivar cambios didácticos en la Cátedra de Introducción a la Matemática y/o en la institución. En tal sentido, con el presente estudio se han arribado a las siguientes conclusiones:

1.- Al identificar y describir los errores que los estudiantes muestran en el estudio de las funciones reales a nivel del curso de Introducción a la Matemática, se pudo evidenciar que dichos errores presentan una sistematización a nivel de un mismo individuo y a nivel del colectivo, es decir son recurrentes en un mismo sujeto, en diferentes oportunidades y se muestran, con cierta frecuencia, entre el resto de los sujetos de la investigación.

La mayoría de ellos se concentran en torno a:

- Uso inadecuado e interpretación del lenguaje simbólico, propio de la matemática.
- Empleo e interpretación de signos: signo de una potencia, signo de una fracción, etc.
- Operaciones con fracciones.
- Producto de polinomios y desarrollo de productos notables.
- Factorización de polinomios.
- Cálculo del Mínimo Común Múltiplo entre expresiones algebraicas

- Reconocimiento de objetos matemáticos.
- Aplicación de las leyes cancelativas y distributiva.
- Concepto de número real.
- Procedimiento empleado para resolver ecuaciones e inecuaciones.
- Localización de puntos en el plano.
- Interpretación del dominio y del rango de las funciones reales.
- Aplicación incorrecta de la regla de correspondencia de una función.
- Interpretación de los tipos de funciones.

Estos errores se evidencian producto de los diferentes obstáculos y dificultades que presentan los estudiantes por la naturaleza abstracta de la asignatura. Las dificultades puestas en evidencia y descritas por los propios actores circulan alrededor de los siguientes contenidos, los cuales se toman textualmente, del discurso de los propios actores: *el producto cartesiano, la representación de los números en la recta real, multiplicaciones*, entendiendo o interpretando con ello, de acuerdo a la experiencia vivida, que éstos se refieren a la multiplicación de polinomios y la aplicación de la ley distributiva, *determinación del dominio de las funciones reales, cuando hay un signo fuera de un paréntesis, productos notables, mínimo común múltiplo, factorizaciones, raíces* (interpretando con ello los radicales y sus propiedades), *raíces de un polinomio, logaritmos, las fracciones y operaciones básicas*.

Estas dificultades pudieran ser muestra de la falta de conductas de entrada o prerrequisitos que no poseen los estudiantes y que son necesarios e indispensables para predecir el éxito en la asignatura. Ellas han de ser tomadas en consideración en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la misma, en donde se hace imperioso contar con estrategias didácticas que propendan a aprendizajes significativos.

2.- En cuanto a la categorización de los errores sistemáticos que presentan los estudiantes en su aprendizaje de las funciones reales, errores éstos mencionados anteriormente y expuestos mediante una selección de ellos a través de las diferentes

figuras mostradas en el capítulo precedente; se ha evidenciado que los mismos se incluyen dentro de las categorías descritas en las diferentes tipologías referidas en el presente informe, mostrándose un predominio de los errores debidos a *la naturaleza y el significado de los símbolos y letras* (Booth), *Errores debidos a la comprensión de las instrucciones de trabajo dadas en la clase* (Astolfi), lo cual incluye una comprensión del lenguaje propio de la disciplina o también *Errores incluidos por el lenguaje o la notación* de Davis o como lo plantea Radatz *Errores debidos al lenguaje o errores producidos por interpretación incorrecta del lenguaje* tal como lo señalan Movshovitz-Hadar, Zalavsky e Inbar (ver situaciones 4,6,10,12,13,23 y 27). En este sentido, los estudiantes muestran resistencia a la lectura y el empleo del lenguaje simbólico, propio de la asignatura, encontrándose casos y situaciones donde el estudiante se expresa con una simbología propia y particular, en detrimento del lenguaje universal de la matemática.

Análogamente, los errores encontrados se concentraron en torno a los *Errores producidos por un aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos* de Radatz, evidenciados en las figuras anteriormente señaladas (ver situaciones 1, 2, 4, 5, 7, 8, 12, 15, 23 y 28) y a través del testimonio de los propios actores, quienes argumentaron que sus errores se originan por *un mala base de matemática*, o porque *se unen las dudas que traemos con las que estamos viendo, no tuvimos ese énfasis en el bachillerato con la matemática que es la base que no sirve ahorita*.

3.- En relación a la percepción que tienen los estudiantes en torno a los contenidos matemáticos inmersos en el estudio de las funciones reales, se pudo identificar que una mayoría de los sujetos conciben a la asignatura con poca, escasa y hasta ninguna utilidad práctica. Consideran que estos contenidos deberían incluir aspectos de mayor utilidad en su vida diaria, *“algo que sea más útil”* y no los relacionan con la cotidianidad y en líneas generales piensan que *“no se usan para nada”*.

De tal forma que esta percepción es extrapolada o transferida hacia la asignatura, puesto ello de manifiesto al identificarse expresiones tales como *“vemos a la asignatura como una asignatura que hay que pasarla”*, *“aquí te dicen por los*

pasillos que una vez que la pases más nunca la vas a utilizar”... ”por lo menos ese tipo de objetivos: límites, derivadas, funciones, son cosas que ya las viste, ya las pasaste, feliz por ti que ya las pasaste”.

Además, los estudiantes mostraron sus creencias en relación al tema de funciones, considerándolo o emitiendo el juicio de que constituye la unidad más difícil, el que reviste mayor dificultad de aprendizaje dentro de las unidades programáticas de la asignatura. Entre los estudiantes se maneja la creencia de que *“el que no apruebe la parte de lógica de la asignatura (Unidad I del programa) no va a pasar la materia”*.

En este mismo orden de ideas, se identificó a través del discurso de los estudiantes y de acuerdo a los errores analizados, mostrados mediante las figuras en el capítulo precedente, que los contenidos en los que les presentan mayores obstáculos y dificultades son los atinentes al producto cartesiano, la representación de los números reales en la recta real, multiplicaciones (distributividad), sumas y signos, dominio de funciones reales, *“cuando hay un signo fuera del paréntesis”*, productos notables, factorizaciones, mínimo común múltiplo entre polinomios, raíces de un polinomio, operaciones con fracciones, operaciones con radicales y logaritmos.

4.- En lo que respecta a los aspectos subjetivos de los estudiantes sobre los errores en torno a la matemática, éstos conciben a los errores como pequeñas confusiones, cosas que creían haber dominado, puros detalles que persisten, que anteriormente no habían tratado así tan puntualmente como lo hacen ahora. Otros los conciben como un bloqueo, como fallas originadas por falta de ejercicios, de práctica y de estudio. También los conciben como algo fáctico.

Estos errores generan un impacto emocional negativo en los estudiantes, produciendo tensión, rabia, angustia, desesperación, que se traducen en dificultades de aprendizaje de orden afectivo. Consideran que sus errores se originan por falta de concentración, dispersión, por una mala base conceptual de secundaria y por no visualizar de manera correcta lo que se requiere en el ejercicio o en la ejecución.

Un aspecto interesante que los alumnos señalaron es el número de estudiantes que poseen las secciones, ellos consideran que siendo éste número menor, el docente puede dedicarse más a tratar aspectos individuales, que permite generar un espacio de mayor confianza para preguntar en la clase, más que cuando el curso es muy numeroso, en cuyo caso los estudiantes manifiestan que se sienten cohibidos por cuanto temen ser criticados y burlados por sus compañeros.

Recomendaciones

Como consecuencia del análisis de los resultados y conclusiones que derivan de la presente investigación se recomienda considerar los siguientes aspectos:

La adaptación de modelos de análisis didáctico de errores, dado que tal como señalan Nikerson, Perkins y Smith, citados en Torre (op. cit), cuando resaltan la importancia de que los docentes tomen conciencia de las deficiencias comunes del razonamiento, no sólo por la idea de que éstas puedan ser corregidas mediante el entrenamiento, si no también que puedan evitar el refuerzo de estos modos de pensamiento. Dentro de estos modelos pudiera citarse el modelo MADE propuesto por Torre (op. cit) o las ideas tratamiento didáctico del error planteada por Socas (op. cit), entre otros.

Cualquiera que sea el modelo adoptado han de considerarse tres fases: localización, identificación y corrección. Las estrategias que se empleen en cada una de las fases dependerán del tipo de error que se trate. En la primera de estas fases la detección puede ser realizada por el docente, la persona que lo presenta o los compañeros de clase; no obstante los docentes se constituyen en los principales agentes de detección y en tales casos su función es transmitirlo, para generar la correspondiente toma de conciencia, y que el alumno se de cuenta que está en presencia de un error.

Entre las estrategias que pueden emplearse en la fase de detección se recomiendan las sugeridas por Torres (op. cit), entre las que se destacan:

- Repetir lo expresado, si el error es manifestado en la forma oral. Cuando el docente requiere del alumno: “No comprendo lo que me intentas decir”, “Dilo nuevamente”, está requiriendo una reelaboración de la respuesta.

- El manejo de preguntas tales como: ¿En cuáles casos es cierto...? ¿Qué pasaría si...?.
- La comunicación no verbal.
- La corrección colectiva.
- La corrección cruzada o intercambio de ejercicios con compañeros.

Por otra parte, en la fase de identificación de los errores se recomienda describir el tipo de error y causa del mismo; lo cual provee información de interés para su posterior rectificación. El estudiante puede saber que ha fallado y donde ha sido pero desconoce en qué consiste su error, que regla, procedimiento o concepto ha sido mal empleado. En la fase de rectificación, una vez localizado e identificado el error, el foco ha de centrarse no tanto en corregirlo como en lograr cambios en el alumno. Obviamente este concepto de rectificación, está mas ligado a la evaluación formativa que a la sumativa; no obstante, lo que interesa es su percepción como un acto positivo y no sancionador.

Algunas estrategias que se sugieren en concordancia con Torre (op. cit) pudieran ser:

- La implementación de una ficha-registro de errores contentiva de los errores sistemáticos, tipología, identificación y descripción del error y estrategia de rectificación, la cual pudiera incorporarse a un fichero de utilidad en cursos sucesivos.
- Corregir o mejorar ejercicios.
- Corrección cooperativa.
- Segunda oportunidad.
- Propiciar espacios de auto-reflexión o metacognición.

Por otra parte, se recomienda además, la realización de investigaciones que pudieran dar pie a una línea de investigación sobre los errores en el proceso de enseñanza y aprendizaje, las cuales pudieran estar asociadas a las siguientes interrogantes, entre otras:

¿Cuáles supuestos teóricos subyacen en el cambio de concepción punitiva del error a una concepción didáctica?

¿Cómo desarrollar propuestas de formación docente en una didáctica basada en un error?

¿Qué resultados arrojaría la estrategia de organizar grupos homogéneos de estudiantes en función de los errores?

¿Cómo pueden los estudiantes aprender de sus errores?

¿Cuál es la relación existente entre los métodos de enseñanza y los errores cometidos por los alumnos?

¿De qué manera será posible evaluar y calificar sin penalizar el error?

.

REFERENCIAS

- Astolfi, J P. (2003). *El Error, un medio para enseñar*. Sevilla. España: Diada Editora.
- Bachelard, G. (2004). *La formación del espíritu científico*. México: Siglo XXI Editores.
- Beyer, W. (2003). Didáctica de la matemática. Mérida. Venezuela: Escuela Venezolana para la enseñanza de la Matemática. Universidad de los Andes.
- Brousseau, G. (1997). *Theory of Didactical Situations in mathematics*. Londres: Kluwer.
- Buendía, L., Colás, P. y Hernández, F. (1998). *Métodos de investigación en psicopedagogía*. Madrid. España: Mc Graw-Hill.
- Camacho, B. (1999). Análisis de los Errores en el Uso del Signo de Igualdad en un contexto algebraico a nivel de 9º Grado de E.B. y 2º Año del C.D. en Barquisimeto. Trabajo de grado no publicado de magister en Matemática. UCLA-UNEXPO-UPEL. Barquisimeto.
- Echeverría, R. (1998). *Ontología del lenguaje*. Santiago de Chile: Dolmen Ediciones.
- Engler, A., Gregorini, M. y otros. (S/F). Los errores en el aprendizaje de la Matemática. [Documento en línea]. Disponible: <http://www.soarem.org.ar/publicaciones/los%20Errores.pdf>. [Consulta: 2006, Octubre 22].
- Espinoza, R. (1995). Un tratamiento del error en que incurre el estudiante en su trabajo de matemáticas, *EMA*, 1(1), 34-38.
- Fabre, Michel. (1995). *Bachelard éducateur*. Paris: Puf.
- Franchi, L. y Hernández, A. (2004). Tipología de errores en el área de la geometría plana. *Educere*, 8(24), 63-71.
- Franchi, L. y Hernández, A. (2004). Tipología de Errores en el Área de la Geometría Plana. *Educere*, 8(25), 196-204.

- Garrote, M., Hidalgo, M. y Blanco, L. (2004). Dificultades en el aprendizaje de las desigualdades e inecuaciones. *SUMA*, 46, 45-50.
- Giordan, A. (1985). Interés didáctico de los errores de los alumnos. *Enseñanza de las ciencias*, 3, 11-17
- Gómez-Chacón I. (2000). *Matemática emocional: Los afectos en el aprendizaje matemático*. Madrid: España: Nancea, S.A. de Ediciones.
- Heller, M. (1998). *El arte de enseñar con todo el cerebro*. Una respuesta a la necesidad de explorar nuevos paradigmas en educación. Caracas: Distribuidora Estudios.
- Herostroza, J. (1997). Los errores en el aprendizaje de la matemática. [Documento en línea]. Disponible: <http://macareo.pucp.edu.pe/~jhenost/articulos/errores.htm>. [Consulta: 2006, Octubre 22].
- Kilpatrick, J; Gómez, P. y Rico, I. (1995). *Educación matemática: Errores y dificultades, resolución de problemas, evaluación e historia*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.
- Mancera, E. (1998). *Errar es un placer: el uso de los errores para el desarrollo del pensamiento matemático*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.
- Martínez, M. (2000). *La Investigación cualitativa etnográfica en educación*. México: Trillas.
- Martínez, M. (2002). *Comportamiento humano. Nuevos métodos de investigación*. México: Trillas.
- Méndez, C. (1995). *Metodología. Guía para elaborar diseños de investigación en ciencias económicas, contables y administrativas*. Colombia: Mc Graw-Hill.
- Piaget, J. (1978). *La equilibración de las estructuras cognitivas*. Madrid: Siglo XXI
- Pérez, G. (2001). *Modelos de investigación cualitativa en educación social*. Madrid: La Muralla.
- Ramírez, T. (1999). *Cómo hacer un proyecto de investigación*. Caracas: Panapo de Venezuela C.A.

- Rico, L. (1995). *Errores en el aprendizaje de las matemáticas*. En Kilpatrick, J; Gómez, P. y Rico, L. Educación matemática: Errores y dificultades, resolución de problemas, evaluación e historia. México: Grupo Editorial Iberoamérica.
- Rico, L. (Coord). (1997). La educación matemática en la enseñanza secundaria. *Cuadernos de Formación del Profesorado*, 12. ICE/Horsori. Universitat de Barcelona. España.
- Sánchez, M. y Nube, S. (Comps.) (2003). Metodología cualitativa de educación. *Cuadernos Monográficos CANDIDUS*, 1, 50-57.
- Senge, P. (1992). *La quinta disciplina. El arte y la práctica de la organización abierta al aprendizaje*. Barcelona: Granica.
- Sierpinska, A. (1999). Theory of Didactic Situations—lecture notes. [Documento en línea]. Disponible: <http://alcor.concordia.ca/~sierpan/notes.htm> [Consulta: 2008, mayo 9].
- Socas, M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la educación secundaria. En Rico, L. (Coord). La educación matemática en la enseñanza secundaria. *Cuadernos de Formación del Profesorado*, 12. ICE/Horsori. Universitat de Barcelona. España.
- Torre, S. de la (2004). *Aprender de los errores: El tratamiento didáctico de los errores como estrategia de innovación*. Buenos Aires. Argentina: Magisterio del Río de la Plata.
- Torre, S. de la y Barrios O. (Coord). (2000). *Estrategias didácticas innovadoras*. Barcelona. España: Octaedro.
- Universidad Pedagógica Experimental Libertador. (2003). *Manual de trabajos de grado, de especialización y maestría y tesis doctorales*. Caracas: FEDEUPEL.
- Vadillo, G. y Klingler, C. (2004). *Didáctica. Teoría y práctica de éxito en Latinoamérica y España*. México: Mc Graw-Hill.
- Valles, M. (1997). *Técnicas cualitativas de investigación social: Reflexión metodológica y práctica profesional*. Madrid: Síntesis.

ANEXOS

**ANEXO A.
SISTEMA FOLDER**

Hoja de Registro

Datos de la Obra:

Ubicación:

Idea General del Contenido:

Elementos de Interés:

Comentarios, Reflexiones u Observaciones:

ANEXO B

Grupo Focal I

Moderador: Bueno chicos,... (risas de los participantes...) yo soy Edelci, obviamente ustedes me conocen como Profesora de la cátedra, pero ahorita estamos trabajando, no en el rol de profesora de la cátedra, sino más en el rol de investigador; estoy muy interesada en conocer aspectos que tienen que ver con los errores en el aprendizaje de la matemática, en la parte de funciones específicamente. Muy bien, voy a iniciar con una pregunta ¿Cuáles son sus creencias en relación al estudio de funciones reales?... ¿Qué creen ustedes?... ¿Qué pasa por su mente cuando les dicen: Vamos a estudiar funciones reales? (Je, je, je, je, Risas...)

S1: ¿Las funciones que vimos hace poquito profe? Eso de...

S2: Gráficas...

S1: Eso de Graficar?

Moderador: Todo eso. ¿Qué creen ustedes con eso?...

S1: Bueno profe cuando usted dice funciones, lo primero que se viene a la mente es grafica, graficar, el sistema de coordenadas, puntos, rectas, parábola, curva, todo eso.

Moderador: ¡Aja!

S1: Entonces uno empieza como a que... a maquinar como va a hacer uno para aprender para poder hacer bien eso.

Moderador: Uno piensa a maquinar como vamos a aprender eso... ¿Qué más?

S2: Uno empieza a investigar por allí, a preguntar la teoría...

S3: Nos sistematizamos en que... ah son tales así... no nos podemos aprender eso...

S2: creemos que no necesitamos la teoría para...

S3: hacerlo.

S2: si, para hacerlo...

Moderador: Y que le han dicho del tema... que les viene a la mente de cosas que ustedes hayan escuchado, que piensan en torno a ello además de graficas, ejercicios, teorías?

S1: bueno profe, la mayoría de la gente no... hay unos que les cuesta más que a otros, pero la mayoría se lleva bien con funciones, la mayoría.

S3: Porque es una parte de la matemática que la hemos visto desde el bachillerato...

S2: Lo que pasa es que uno a veces tiene una mala base del bachillerato, entonces cuando uno viene aquí se vuelve así como complicado, a veces el profesor de bachillerato era así como se dice...todo pirata, eso medio daba la clase, entonces uno viene aquí entonces pareciera que fuera nuevo pues,

S4: se unen las dudas que traemos con las que estamos viendo.

S2: Se vuelve todo una maraña.

Moderador: ¿Las dudas de las que hablan son del pasado, de las cosas que no dominan?

S1: Que nos han quedado...

S5: Y también cuando vamos por los pasillos y preguntamos: ¿Qué tal es esa profesora?, ¿Cómo es eso?... no, eso es difícil, eso es...

S3: Porque por ejemplo aquí en la universidad yo siempre he escuchado que...a mí en realidad yo considero que, aunque sea lo contrario a lo que estoy demostrando ahorita, si traigo una buena base del bachillerato pero...hay un mito que se oye aquí en los pasillos que cuando uno llega a la universidad, no que funciones es el objetivo más difícil, que son las dos últimas pruebas... que si no aprovechas los primeros objetivos...

S4: Que es la parte de lógica

S1: El que no pase la primera prueba de lógica, no va a pasar la materia. Y yo raspé lógica, entonces yo... ¡Ay! Entonces uno como que se le bloquea la mente, y por ejemplo, ¿Con los profesores? No, ese profesor es peluísimo...no vas a pasar...! Ya!

S4: Uno como que se graba eso aquí (señalando la cabeza)...

Moderador: Y después que están viviendo en el espacio de las funciones, ¿De qué se dan cuenta?

S2: Que no es así...

S3: No es tan complicado como nos dicen...

Moderador: ¿No es tan complicado?

S2: Eso depende de cómo lo explique también el profesor, porque hay profesores que lo explican sin ánimo ni nada, en cambio la profesora Edelci que nos está dando ahorita ella si nos manda ejercicios, nos lo manda a colocar en una carpeta que nos mandó. Entonces nos motiva, porque eso también va por parte de la motivación del profesor...nosotros también tenemos que poner de nuestra parte pero si él no nos motiva...en cambio la profesora si, nos dice que tenemos que traer ejercicios, nos da puntos por esa carpeta que nosotros tenemos que traer... eso también va de parte de él, de ellos

S1: Profe yo creo que todos en el salón, cada quien hizo sus ejercicios. Yo no creo que nadie haya... o sea...todo el mundo hizo sus ejercicios. ¡Dígame yo!..Yo que tuve todos los primeros malos, eso lo hice yo sola así le consta que los hice yo.

Moderador: No hay problema, eso lo habíamos hablado...

S5: ¿Qué más quiere saber usted?...

Moderador: Mucho, mucho, mucho; todo lo que a ustedes se les venga a la cabeza, ahora ustedes me acaban de dar una información valiosísima, ¿No? Es que nos dicen que la parte de funciones es la más difícil...Que si no pasamos lógica...y ya eso, por supuesto, les genera a ustedes bloqueos. ! Que interesante! Y ¿Qué significado tiene para ustedes el estudio de las funciones reales en su vida?...

Relator: cotidiana...

Moderador: cotidiana y/o en su vida como estudiante también...

S1: Yo me imagino que eso más adelante lo vamos a utilizar porque de la carrera que estamos estudiando es pura matemática, me imagino que a lo largo de la carrera vamos a estar viendo eso, gráficas más que todo, de hecho el programa que usted nos dio eso nos ayuda también a...o sea...por ejemplo nos va a servir porque a lo largo de la carrera lo vamos a estar viendo y lo vamos a estar utilizando diariamente pues, como que nos ayuda más a desenvolvernos...

S4: En economía estamos viendo muchas gráficas.

Moderador: ¿Les han servido?

S1 y S4: ¡Si!

Moderador: Digamos que con aplicaciones directas de la economía... Y ¿En la vida cotidiana, en lo diario, en las funciones en el día a día?

Relator: En la casa, cuando hacen compras...

S5: Bueno yo pienso que sería como parte de economía más bien...

S1: ¿A nivel matemático dice usted profe?

S2: De cómo administrar... (Risas)

S1: En la economía... en los problemas de la oferta y la demanda, los precios, por ejemplo el problema, y cosas así pues...eso está como relacionado con las cosas de nosotros a diario.

Moderador: De la economía, diario, OK. Y en ese estudio de funciones nos golpeamos, nos encontramos, o lo vemos o vivimos con ellos, los errores. ¿Qué es para ustedes un error?

Relator: ¿Cómo definirías un error?

S2: Una falla..., algo fáctico...

S4: Una falla...

S1: Cuando queremos saber algo y... y lo hacemos y no es pues...

S2: Nos equivocamos, de manera inadecuada.

S3: Algo que no hacemos bien

Moderador: Algo que no hacen bien...

S2: Yo digo que es una equivocación que uno tiene. Por ejemplo como dice Valentina, cuando hacemos un ejercicio y uno piensa que está bien, pero por ciertas fallitas ahí nos equivocamos.

Moderador: ¿Y cómo consideran ustedes los errores cuando se presentan?

S4: Con rabia, desesperación, ira...

S1: Uno se pone... se histeriza toda porque uno cree que lo hizo bien, pero luego uno después que ve el error, uno se da cuenta que lo sabe hacer, que es una tontería, estupideces, después uno lo hace...

S4: Son propiamente puros detalles, por ejemplo que uno hace en los errores, son así puros detalles que uno dice pero cónchale...se equivocó por puras estupideces...

S1: Por ejemplo Yo, el producto cartesiano, yo me equivoco representando los números en la recta real. Desde donde van unidos hasta donde van, en eso yo me equivoco muchísimo, y si hago eso mal, todo el ejercicio malo porque desde el principio esta malo.

Moderador: ¿Y qué hace que te equivoques colocando los números en la recta?

S1: Porque pienso que van de un número a otro y no es así, no me fijo bien en lo que tengo que ver.

Moderador: No te fijas bien.

S3: No tengo concentración

S1: No tengo concentración, soy muy dispersa.

Relator: ¿Y a ti en tu caso?

S3: Yo pienso que es concentración también, y que...por lo menos... será distracción también... pero del resto no... , creo que es eso.

Moderador: ¿Será la distracción entonces, falta de atención?...

Relator: ¿Entienden las preguntas cuando se las hacen en los exámenes, pero luego cometen errores?

S3: Si...

S1: No, en el examen está claro, lo que pasa es que cuando uno va desarrollando el examen...

S3: De repente en el momento del examen es donde surge otras cosas, que si nervios...

S5: uno se bloquea...

S3: El tiempo...

S4: El tiempo y la presión...

S3: Uno con el tiempo...viene la presión...vienen los nervios...las manos sudorosas...

Moderador: ¿Han necesitado más tiempo para desarrollar los exámenes?

S1, S2: A veces...

S2: Si el examen es muy largo y complicado a uno no le da tiempo, sino profe ya voy, ya va,... pero no, la mayoría de la gente entrega su examen a tiempo,... todo depende del tipo de examen.

Moderador: Y el hecho que tengan premura con el tiempo, ¿Ustedes creen realmente que es un indicador o algún factor que les hace cometer errores?

S2: Si influye profe, si influye porque uno tiene la presión de que no le va a dar tiempo. Uno siempre llega temprano aquí y quiere que le entreguen la prueba rápido para uno poder sentarse a desarrollarla.

S3: De repente en el examen tuve que...aja cometimos un error y en el mismo examen nos damos cuenta de que hemos cometido un error y lo volvemos a hacer y...y...

S1: O uno mismo si se da cuenta que ha cometido el error...tiene que repetir la pregunta. Yo me quedo desarrollando la pregunta como media hora y le doy y le doy y le doy y le doy y ya tengo media hora perdida sin hacer nada... ¿Entonces qué? Me falta tiempo...

Relator: Cuando ustedes se dan cuenta de los errores, ¿Éstos se originan por qué causa? ¿Por qué multiplican mal, porque razonan mal?... por lo general ¿A qué se debe?

S1: Por mi parte yo soy muy acelerada, yo hago la prueba muy rápido y entonces después cuando ya estoy terminando y la estoy viendo, veo que me equivoque en las multiplicaciones, sumas, en los signos, ay!...

Relator: ¿En el caso tuyo? (Le pregunta a otro participante)

S3: ¿En mi caso?

Relator: Aja... Que tú te hayas dado cuenta de errores, ¿Por qué han sido esos errores? ¿Cuáles han sido las fallas?

S3: Tal vez por falta de estudio, en muchas ocasiones...

Relator: Pero, ¿A nivel de qué?, ¿de multiplicaciones? ¿Divisiones? ¿Signos?...

S3: Para mí, los mínimos.

Relator: ¿Mínimo común múltiplos?

S3: A mí me cuestan mucho, los mínimos cuando son con exponentes que traen una base, me cuesta bastante...

Moderador: ¿Dónde tengas que factorizar?

S3: Si, donde tenga que factorizar...

Relator: ¿Y en el caso tuyo Lisseth? (Le pregunta a otro participante).

S2: Este... bueno yo diría que también falta de concentración, bueno porque cuando yo estoy haciendo la prueba, bien... pero como dice Valentina, cuando uno va terminando es que uno se da cuenta que arriba tuvo un error y tiene que ir borrando; una cuestión de una multiplicación, cuando hay un signo fuera del paréntesis, que hay que multiplicar todo eso que afecta a todo el paréntesis, si se me pasó un signo, tengo que borrar todo eso. Porque al no borrarlo, si está la parte de arriba malo entonces lo de abajo también.

Relator: ¿Y en el caso tuyo? (Le pregunta a otro participante).

S4: A veces en mi caso, es por,... no sé, me pongo nerviosa a veces por falta de de... como que me pongo así como que a bloquear, o sea cuando empiezo hacer los ejercicios, y entonces después empiezo que y que ese ejercicio no era así y entonces después empiezo a borrar otra vez. Entonces me vienen así como tantos ejercicios a la mente, entonces no sé como definirlos en el problema que estoy realizando.

S5: Yo creo que es por falta de...o sea, no sigo una metodología, no sigo un orden, no sigo una especie de procedimiento, una metodología, a veces me enredo toda.

Moderador: Digamos que tú hablas de errores de procedimiento entonces. Alguien nos hablaba de errores de base...,

Relator: De operaciones básicas

Moderador: ... operaciones básicas, ¿No?, que le hacen falta, ¿No?, otros que se les vienen a la mente muchas ideas

Relator: y las formas de resolver.

Moderador: Muchas formas de resolver... ¿Tiene que ver con la posibilidad de elegir un camino correcto?

S1: Bueno, a veces hay que decidir por ejemplo... al profesor le gusta esto, que coloques esto, esto y esto; y si tú no se lo colocas, te va a poner esto malo; entonces tú vuelves otra vez a borrar. Y tú tienes que colocar, por ejemplo tienes que colocar X, que sea dominio, dominio de todos los números reales...

Moderador: ¿De dónde surge esa idea?

S2: Aunque a veces es por...por ejemplo en mi caso es porque he repetido la materia entonces, por ejemplo, Jannet Santaella decía una cosa, y usted, por ejemplo, dice

otra, y entonces con usted teníamos que colocar un tal signo y con ella no, entonces era así como distintos métodos, distintos profesores.

Moderador: ¿Cómo creen que en realidad esos errores se presentan? ¿Cómo surgen ellos?

S4: En el momento de que estamos en la prueba, que estamos ahí, inspirados, uno se queda, uno se tranca.

Moderador: Es una provocación,... es un sabotaje que nos hacemos.

S1: Pero nosotros mismos, nadie nos ha provocado.

Moderador: ¿Alguna vez nos hemos preguntado eso? ¿Cómo surgen ellos?

Relator: Han reflexionado sobre ¿Por qué me equivoqué si yo lo sabía?

S1: Uff! Mucho...

S2: Si mucho, cuando uno sale de la prueba, uno... ay me equivoqué...empieza a preguntar sobre los resultados o como lo hiciste tú, que resultado te dio... el otro te dice me dio tanto y no es lo mismo que uno tiene, uno se...

S3: Cuando vemos que resolvemos la prueba en clases y vemos que fue tan simple, nos equivocamos en todo, hacemos de...

S2: Nos ahogamos en un vaso de agua cuando estamos haciendo la prueba, yo me imagino que deben ser los mismos nervios, por ejemplo nosotros somos repitientes y si no pasamos esta materia, o sea matemática ahorita, entonces no podemos ver la siguiente, entonces vamos a seguir avanzando. Eso es presión para nosotros, no es que la tenemos que pasar por pasar... la idea es que aprendamos de la materia, pero también nos angustia que cónchale nos vaya a quedar y que no podamos ver ninguna del tercero.

S1: Por lo menos yo ahora he aprendido lo que no había aprendido en mi primer semestre. No tenía idea, nada de lo que iba a hacer.

Moderador: ¿Cuál ha sido la diferencia?

S1: La primera vez que yo vi eso profe habían muchas cosas que no entendía y el gentío gritando profe, ese gentío profe... ¿Será que pregunto? Es capaz que si pregunto me digan ¿Y tú no sabes eso?...mire que uno se cohíbe todo, porque uno dice, nada...pero ahora no, todo el mundo ha pasado a la pizarra, todo el mundo ha dicho las dudas que tiene...es diferente pues.

S2: Como somos más poquito en la sección, la profesora se dedica más a nosotros, nosotros le preguntamos más a ella, es como que existe una mayor confianza para preguntar que cuando en el salón hay mucha gente, uno piensa que se van a reír, criticar, pitar.

Moderador: O sea en esos momentos en que ustedes no preguntan hacen que esos errores se maximicen o se presenten en mayor volumen, ¿Verdad? y lo que los cohibe, por los que les escucho, no es el profesor que se niegue a responderle o no a la pregunta, sino el grupo numeroso, eso es bien interesante, ¡Que increíble!, Ahora cuando se dan cuenta de los errores que han cometido, ahorita estábamos chequeando eso, que en la prueba ustedes salen y después en clase ven que las cosas no eran así como ustedes se lo habían imaginado ¿Qué sienten, como se sienten con eso, con qué contactan? ¿Cuál es la emoción con la que contactan?

S2: Bueno, en mi caso yo me siento mal porque veo que la profesora resuelve la prueba, después y veo que es algo fácil, entonces uno piensa que...ay no porque si el ejercicio está de este tamaño va a ser muy largo o no se que cosa, pero hay veces que hay que...así como...recortar el ejercicio...

Moderador: ¿minimizarlo?

S2: Aja...de algo grande entonces uno piensa que como el ejercicio es grande uno tiene que durar un tiempo ahí haciendo eso... como que...veces uno cree que si el ejercicio es muy grande uno durará más en hacerlo,

S1: Eso es otra cosa, uno lo ve en la prueba y piensa ¡ah!, ¡no lo se hacer!... piensa que está “Muy pelúo” y después uno lo va haciendo y es fácil.

Moderador: ¿Y si no estuviera en el examen?, ¿Si estuviera en el cuaderno como un ejercicio?

S2: No hubiera tanta presión (hay una algarabía, todos participan a la vez, se dificulta entender) entonces uno tuviera más chance de poderle preguntar...esto se hace así y así...

Moderador: Ahora, ¿Cuáles pudieran ser esos temores que tienen ustedes en base a la presencia de errores?

S3: El mío es repetir otra vez la materia, por ser repitiente, lo que dijo la compañera de no ver una materia del tercero, entonces la presión familiar... y es uno mismo... de repente uno se siente comprometido con la profesora que se ha dedicado tanto a nosotros...

S4: Que cónchale fallarle a la profesora que se ha dedicado a nosotros... ¿Y nosotros que tenemos que decir? Quedarnos la materia es como si le fallamos a ella también...

S2: Claro... y fallamos a nosotros mismos y, por ejemplo en mi caso, a mi familia también; porque ellos han puesto empeño en que yo esté estudiando, me motivan, me dicen que no importa, quédate tranquila Lisset; que si te quedó, la vuelves a ver; que no se que cosa; o sea, es una motivación; no me gustaría pues...¿Con qué cara le voy a decir a mi mamá que me volvió a quedar la materia?...entonces van a decir ¿Qué vas a hacer tu a la Universidad entonces? ...

S1: Por lo menos mi mamá vive pendiente de mi y de matemática, ¿Cómo saliste?, ¿Qué tal las clases?

Relator: ¿Y tú que opinas?

S5: Yo... Bueno, yo también igual, porque la presión mía es que me vuelva a quedar la materia, fallarle a la profesora, fallar a mi misma, y fallarle a mi familia ya que ellos esperan que yo surja, que salga rápido de la universidad.

S4: Y mayormente es la presión que como uno mismo se va a fallar o... y también a la profesora y cónchale y que uno quiere salir rápido de la universidad para ayudar a su familia y eso...

S3: Muchas veces vemos a los compañeros con los que tú empezaste que van más adelantados que tú y tú te vas quedando, te vas quedando.

S2: Me siento decepcionada

S3: Yo no he podido bien...

Moderador: Bien interesante... Miren yo les traje unos errores que tomé de algunas de las actividades que nosotros hemos hecho en clase, ejercicios, del taller, de algunas evaluaciones, en la parte de funciones y yo quiero mostrárselos para ver que opinan de ello. No puse muchas, pero hay bastante, pero no puse muchas porque no nos va a alcanzar el tiempo ahorita para analizarlas, pero quise traer algunos casos específicos.

Relator: A ver... ¿Qué errores ven ustedes allí?...

Moderador: ¿Qué ven ustedes en el uno? ¿De qué se dan cuenta?;... revisemos con cuidado la primera columna, revisemos el ejercicio primero. Determine el dominio de la función "g" con g de x igual a la raíz cuadrada de x mas dos, todo sobre ocho x, menos la raíz cúbica de, x a la cinco mas x a la tres, menos uno, todo sobre x a la dos menos cuatro, y este fue el desarrollo que hizo una estudiante, x, no importa, es más lo hicieron varios, fíjense en la primera columna que escribió ocho x, ocho por cero...

Relator: ¿Qué errores ven ustedes allí?

S3: Creo que no está el mínimo...

Relator: ¿No está el...?

S1: Ahí eso es lo que estamos viendo ahorita de...lo del dominio y rango.

S5: Por ejemplo aquí donde dice 8 equis, yo creo que él trató de colocarle... fue...como colocarle valores a x,

S1: Él está diciendo que el cero elimina el denominador y eso es lo que no queremos.

Moderador: ¿Pero él lo dijo?

S2: No.

S1: El lo puso pero a su manera, o sea, él lo entiende a su manera, usted lo entiende pues...

Moderador: Él lo puso a su manera... Digamos que él maneja un lenguaje.

S3: Exacto

Moderador: Ustedes lo dijeron: “Él lo maneja a su manera”; ¿Pudiéramos pensar entonces que es un error de lenguaje?

S2: Si, también...

S1: Aquí él tiene que poner x cuadrado menos cuatro igual cero

Moderador: ¡Aja! No igualó a cero, ¿Se dieron cuenta?...

S1: Para él después pasar el menos cuatro para allá positivo y sacarle la raíz...

Moderador: ¡Aja! ¿Y cuándo tiene x igual a raíz cuadrada de cuatro de que se dan cuenta?

S1: Que falta el más y el menos.

Moderador: ¡Eso!... Que falta el mas y el menos... y lo saben... ¿Y a ustedes les ha pasado eso?

S1: ¡Uff!

Relator: ¿Qué ibas a decir tú?

S1: No, pero era en otro ejercicio...por ejemplo, la raíz cuadrada de x mas dos era mayor o igual que cero...

Moderador: mayor o igual que cero, pero ¿con la raíz?

S5: ¿La raíz?, no... no hay que colocarle la raíz

Moderador: O sea... ¿Ahí nada más en esa línea hay cuántos errores?

S5: Dos.

S1: Ahí tenía que sacar primero x más dos y después poner mayor o igual que cero

Moderador: ¿Y luego abajo?...Donde el escribe x igual a dos.

S2: Él lo que trató aquí fue como de despejar, x pasó el menos dos para allá...pero ahí no debe haber igual...

Moderador: ¡Ah!, entonces confunde ecuaciones con inecuaciones, que son dos cosas distintas. ¿Ese será un error de este tipo?

S4: De lenguaje.

Moderador: ¿De lenguaje?

S2: De procedimiento...

Moderador: De procedimiento, eso es...y también de concepto, porque una ecuación no es lo mismo que una inecuación; y luego dice: dominio de R igual a eso, ¿Cómo obtuvo ese dominio?... (Silencio)

S1: No sé... el dominio es de f...

S4: Puso de los reales.

S5: Aquí el dominio de R...

Moderador: El dominio de R, empezando... ¿El dominio es de quién? De la función,...

S2: Dominio de g

Moderador: Dominio de g... ¿Ese es un error de qué tipo?... ¿Qué nombre le pondríamos?...

S2: Conceptual

Moderador:...y de notación, ¿Verdad?; el lenguaje otra vez...muy bien...y... ¿De dónde sacaría ese menos infinito menos dos unido con dos más infinito? ¿No?

S4: Porque estaba tomando el dominio con respecto a los números reales.

S2: Aja y entonces puso...agarró fue los... o sea...agarró los valores de x cuadrado menos cuatro y de la raíz de x mas dos, o sea puso eso...

S1: Agarró el numerador y el denominador y eso no...

Moderador: ¿Y por qué en intervalos?... (Silencio)

S2: Lo que pasa es que él tomó todos los reales y puso el punto x igual a dos y x igual a menos dos, ¿No?, entonces me imagino que él pensó que... todos los reales y como la intersección quedaba abierto, al unirlos quedaban abiertos...

S5: lo hizo por el método del... Cementerio

Relator: ¿No ven mas nada allí?, ¿No ven mas nada?; ¿Pasan al dos? (Silencio)

Moderador: Vamos al dos. Determine el dominio de la función f

Relator: ¿Por qué pones esa cara?

S4: ¡Es que ese lo hice yo! (Risas)...

S1: Allí lo que pasó fue que cuando uno va a cambiar las raíces uno tiene que cambiarles el signo para buscar el dominio

Moderador: ¿Por qué?

S1: Profe porque... o sea...cómo le diría...al despejarlos me va a quedar como aquí...

Moderador: Este es un error que es común...intercambiarle el signo...las raíces son las que están aquí

S3: las raíces...esa es la confusión...

S1: ¿No se les cambia el signo?... ¿No se les cambia el signo?...

S3: x mas...

Moderador: Y ¿Por qué?... ¿Por qué hay que cambiarle el signo? (Algarabía...todos quieren participar a la vez)

S5: Porque cuando se fac...cuando se factoriza...

Moderador: Cuando se factoriza pero no estamos factorizando...aja.

S5: No... (Se da cuenta...en reflexión)

S2: Ah?

Moderador: Aja... luego he allí un error de procedimiento ¿Verdad?, no tenemos porque cambiarle la raíz porque lo que estamos diciendo es que menos uno es una raíz, yo no tengo porque cambiársela aquí abajo.

S1: Entonces quedan iguales.

Moderador: Muy bien pero ¿Dónde hay más errores allí?, hay más...

S5: En menos diez más catorce...

Moderador: Aja, ¿Menos diez mas catorce?

S4: cuatro...

Moderador: ¿Y escribiste?

S4: veinticuatro

Moderador: Aja... pero fíjense que hay allí una cosa bien interesante allí , digna de revisar, ...mas adelante hay otro error... dos por uno igual a dos, ¿Uno menos dos? Mas uno, sin embargo uno y cuatro no es tres, cuando yo transcribí este error, de donde lo transcribía el mas uno estaba borrado, y a veces escribía menos uno, había como una duda allí, si era mas uno ó menos uno, entonces fíjense bien, tengo el juicio y quiero precisarlo con ustedes ahorita que estamos aquí, a ver... ¿Qué pudiera estar pasando?, que aún cuando yo me doy cuenta que arriba pudiera tener un error, yo persisto en el error, que me conlleva a otros, vean bien a ver si ustedes le ha pasado; yo como que voy a forzar la situación para que me de.

S1: Uno tiene que seguir a costa de lo que sea que a uno le dé...

Moderador: ¿Qué a uno le dé?, ¿Sin revisar atrás?

S1: Profe en la prueba a mi me dio así, yo puse y que tres por tres era seis para que se me eliminara el seis; tres por tres es nueve, entonces ¡ah!, eso no es así, ¡claro que

no es así! Ah! (exclamación)...tres por tres es nueve y había puesto seis... ¿Cómo se me ocurre?...

Moderador: Vean el 3 ahora. Tenemos la función que está definida por f de x igual a 3, si x es menor que tres; por x al cuadrado menos uno, si x está comprendido entre tres y menos tres e igual a menos x si x es mayor que tres. Para x perteneciente al intervalo menos infinito menos tres, “ y ” igual a tres, ¿Si o No?... “ y ” siempre va a valer 3, lo escribió... pero vean en la tabla... ¿Qué dice la tabla?

S2: Que valía a... que menos dos valía a uno, y menos tres valía a cero, eso ahí... se supone que “ y ” igual a tres es una constante, entonces él colocó como que...algo así como que si tuviera haciendo una ecuación lineal.

Moderador: Y ¿De dónde sacaría esos valores de uno y cero?

S4: No profesora, este ejercicio lo hice yo.

Moderador: Ja, ja. Se declara culpable,...ella se ríe...ja, ja, ja...dime Lorifran

S4: Los coloqué por colocarlos, o sea, no, no...

Moderador: Aja, ¿Los colocaste por colocarlos? ¿El uno y el cero?

S4: Si.

Moderador: Aja, pero el uno y el cero ¿A esto te refieres Lorifran?

S4: Asintiendo corporalmente

Moderador: Okey, ¿Por qué uno y por qué cero Lorifran? Eso está bien interesante

S4: Mmm... (Silencio)...Porque escogí los valores que estaban... o sea que no...que no estaban en los intervalos...estaban...o sea que estaban...o sea que no estaban desde menos infinito hasta menos tres, los escogí de, o sea, de menos dos en adelante.

Moderador: OK, esos son valores de x , pero ¿Cómo obtuviste los de “ y ”, que son justamente los errados?

S4: (Silencio...No contesta la pregunta formulada).

Moderador: Es interesante y podemos precisar ahí lo mejor que tienes una valiosa respuesta, uno, para evitar volver a cometerlo y tienes un espacio de aprendizaje. OK, fíjate bien, ahí la función es constante, “ y ” igual a tres; si es constante, para cualquier valor que tomes de x siempre la “ y ” va a valer 3, ¿Te distes cuenta ahora cual era el error?

S4: Que no defino las funciones.

Moderador: Que no defines las funciones. ¿Ese sería un error de qué tipo?, sería de concepto, ¡Que interesante!, ¿Ves el descubrimiento?...necesito definir, saber dónde estoy parada ¿qué es lo que es? para poder darle curso. ¿Hay aprendizaje allí?

S4: Si.

Moderador: Y fíjate en el otro intervalo, para x perteneciente a menos tres, tres; la función está definida por menos x cuadrada menos uno; le cambiamos allí el signo y ¿Cuál será la imagen de menos tres?... (Silencio)... ¿Es ocho?... ¿Si?... Si es con el menos adelante, no lo sería; si es sin el menos, si lo sería. Fíjense la gráfica es una semirrecta, ¿Qué tipo de función es esa?... (Silencio)... ¿ x cuadrado menos uno?... ¿Es lineal?...

S5: Es cuadrática.

Moderador: Cuadrática. Entonces, ¿La gráfica es...?

S5: Una parábola.

Moderador: Volvemos otra vez, el concepto, siempre vamos a preguntarnos ¿Qué es? Siempre les he dicho qué es eso: Un chivo, un ornitorrinco, un mato real... ¿Qué es?...ustedes se ríen porque siempre les digo así. Muy bien, en la cuatro, el dominio de f con f de x definido de esa manera (señalando el material entregado), y grafique, ese era el ejercicio, graficar ¿Se acuerdan?... Muy bien... ¿Cuál es el error?... ¿De qué se dan cuenta?

S1: Profe allí había que hacer x más cinco igual a cero.

Moderador: ¿Para definir qué cosa?

S1: El dominio

Moderador: El dominio... ¿Cuál es entonces el dominio de la función?

Participantes: Todos los reales menos el cinco

S1: Todos menos el que anula el denominador

Moderador: ¡Aja! ¿Y de qué se dieron cuenta allí?...

S2: Que no había que hacer ese paso, porque...o sea, tomando el denominador, que es x mas cinco, lo igualamos a cero y después despejamos a x , que anula el denominador sería menos cinco, el dominio sería todos los reales menos el menos cinco, o sea, ese paso era...

Moderador: ¡Aja!, pero aparte me piden graficarla, entonces tengo que transformar esa función en otra, donde yo pueda eliminar la indeterminación que me está dando el cinco, digo el menos cinco, ¿Si?, o sea es factorizar; fíjense que aplica Ruffini correctamente, pero no sabe para qué, para qué lo aplica, pierde la brújula...

S1: Ahí tenía que factorizar el numerador.

Moderador: Si, había que aplicar arriba Ruffini para poder factorizar

S1: Tenía que hacer una factorización y una simplificación

Docente: Eso, entonces factorice...pero qué sentido... a ver, a ver, ¿Qué sentido le encuentran a esto?: x mas “ y ” menos seis igual cero...

S2: Lo que pasa es que él hizo Ruffini, y no se acordó aquí como hacer esta cuestión de aquí abajo, entonces pensó que colocando esto iba a cancelar todo eso.

Moderador: Y ¿Por qué eso y no otra cosa? ¿De dónde saldría x más “ y ” menos seis igual cero?

S3: Esa es la ecuación de la recta

S1: Ella como que lo sacó de aquí...

Moderador: ¿A ver, a ver?

S1: Claro lo que pasa es que lo hizo malo, allí el término... o sea el término...

S2: El primero tiene que ser al cuadrado

Moderador: ¡aja!

S2: Y el cero no varía con y , entonces no es y

Moderador: no es “ y ” es x , ¡Muy bien! ¡Aja!

Moderador: ¿De qué te das cuenta?

S4: Que uno confunde y mezcla las cosas

S2: Que uno no visualiza bien la... o sea lo que en un ejercicio uno haría porque si se hubiese visualizado, el ejercicio bien, porque no haciendo eso el resultado está malo

Moderador: Es decir, que hay un proceso mental que no hacemos, el de visualizar.

S2: Y el de revisar también, porque si hubiese revisado hubiera detectado la falla

S5: Si, volver a leer la pregunta; si uno vuelve a leer la pregunta uno sabe como es el procedimiento de esa pregunta, no hacerlo así como que... ¡ah si! la ecuación es tal y ya, lo voy a hacer.

Moderador: O sea que hay procesos mentales que de repente nos estamos saltando, ¿Será eso lo que me quieren decir?

S1: Los pensamos pero no los escribimos...

Moderador: ¿Cómo así?

S1: Profe, hay veces en que yo pienso el procedimiento y estoy tan concentrada haciéndolo que pienso que lo puse y no lo puse

S4: Profe y yo, yo digo pero si yo lo hice...

Moderador: Imagínense, ¿Cuántos errores podemos contabilizar allí en el ejercicio 4?... (Silencio)... ¿2 ó 3?

Moderador: El dominio es uno...

Relator: ¿Cuál ves tú, Lissette?

S2: O sea, nos habían que colocar, o sea, no había que colocar “y”, allí hay un error

S5: Además de lo del x al cuadrado

S1: Y aquí tenemos una ecuación con dos incógnitas que no tiene nada que ver con lo que hay que hacer

Moderador: Que no tiene nada que ver con lo que hay que hacer...Digamos entonces que es un procedimiento entonces, errado. Vamos a ver ahora el N° 5... (Silencio)...

S1: Allí había dos maneras, lo que tenía que hacer era nos dan menos dos x al cuadrado menos cinco x más tres, después lo de f, sustituirlo en esa ecuación pues, o sea...

Moderador: ¿Y eso no fue lo que hizo?

S1: Bueno profe, lo que pasa es que este menos uno lo...uno lo... nosotros ponemos menos y la ecuación y hay que colocar todo entre paréntesis para saber que ese menos multiplica a todo lo que está dentro de la ecuación

Moderador: Vean bien lo que le pidieron.

S2: Lo que pasa es que no...donde dice x mas h y todo elevado al cuadrado no hizo nada allí, sino que multiplicó 2 por 2 y 4x...no hizo...no sé... se me olvidó... el producto notable

Moderador: Hagámoslo. Si lo desarrollamos, el resultado esta allí. Es directo, x al cuadrado al multiplicarlo por dos resulta dos x cuadrado con este que está aquí, que tiene signo contrario se van a cancelar, uno está positivo y el otro negativo; el doble producto del primero por el segundo: sería 4xh, que es el cuatro que voy a tener abajo, voy a extraer h factor común,...y sigo desarrollando la actividad pero vean lo que tienen en la parte izquierda de todo eso, ¿Qué dice la parte izquierda?...f de x, ¿Si o No?... ¿Qué le pidieron?...Ese es un error común que tienen todos los estudiantes, hasta los de matemática I; ¿Qué le pidieron?

S1, S2: Minimizar la expresión

Moderador: Claro, minimizar la expresión, pero ¿Cuál expresión?

S1: f de x más h menos f de x, sobre h.

Moderador: ¡aja! Y ¿Qué escribió abajo?

Participantes: f de x

Moderador: Entonces tengo una misma “f” definida de dos maneras distintas, eso atenta con lo que es la función, ¿Cuál es el error allí?

S1: Que puso f de x igual a...

Moderador: Que puso f de x igual a... ¿Eso es un error...?

S1: Garrafal.

Moderador: ¿Garrafal?

S5: No...

Relator: ¿No estas de acuerdo?, ¿Por qué?

S5: No...conceptual, yo digo que conceptual ¡pues!, o sea confundo, porque yo hago esto siempre

Moderador: ¿Escribes f de x?

S1: Yo le pongo f es igual, lo resuelvo todo y al final le pongo f es igual a esto

Moderador: ¿Será porque es necesario ponerle un nombre a algo?

S5: O sea que ¿Había que poner f de x mas h menos f de x, sobre h?

Moderador: Exacto, Ahora ¿Por qué f de x?

S5: Por la f de x que está acá arriba, yo lo confundo con esto.

Moderador: Tú lo confundes con esto. ¿Allá arriba?

S5: ¡Aja!

S2: Es que no se debería profe, para uno poder resolver eso tiene que partir de la expresión.

Moderador: ¡Aja!

S2: Entonces habría que colocarla aquí, y esto es igual a esto, y ya al colocar aquí uno se tiene que fijar que lo que tiene acá arriba el resultado tiene que ser igual a esto, uno siempre tiene que partir de la función

S1: Eso es como un dato que le dan a uno

S2: Aja, como para uno sustituir acá.

Moderador: ¡Aja! digamos entonces, ¿Que es un error de notación?, ¿Qué tipo de error sería ese? ¿Qué nombre le pondrían ustedes?,

S4: Un error de cálculo, je,je,je...

Moderador: ¿Un error de cálculo?, alguien dijo en el grupo anterior que ese era un error permisible porque yo lo cometía y a veces no me lo penalizaban. ¿Qué les ha parecido hasta aquí este análisis que han hecho de los errores?

S2: Muy bueno

Moderador: ¿Se han detenido en anteriores oportunidades a revisar y a contactar los errores, así como lo están contactando ahorita?

Participantes: No

Moderador: Sacarlos, tocarlos, sentirlos...

S5: No, porque... o sea...por ejemplo yo, siento tanta ira que ni veo la prueba, o sea, guardo por allá y no la veo más nunca.

Moderador: Ah! La guardas, guardas los errores, los esconden

S5: Mas nunca los veo, da tanta ira contra ello

Relator: O sea, ¿Qué no retomas, no te pones a reflexionar sobre cuál fue el error para superarlo?

Moderador: ¿No hay un trabajo entonces para superar errores?

S3: La manera que decimos de... para mejorar los errores es “no, bueno, para la próxima”

S4: Estudio más.

Moderador: Pero estudias más, pero ese error no lo revisaste.

S3: Ese error queda ahí

Moderador: ¿El error queda allí?

S1: Si no se aclara claro que queda allí

S3: Si no se aclaran, las dudas siguen

Relator: Pero ¿No comienzas a buscar donde está el error?, ¿Por qué lo cometiste? error

S5: Yo por lo menos no. Tengo tanta ira que lo dejo ahí y si es posible le prendo candela. No me intereso más en ello.

Moderador: ¿Y tú, Lissette?

S2: Bueno, cuando me van a dar la prueba que yo se que ya los resultados no son como los que... yo raspé y entonces me dan la prueba y entonces yo...ya...yo se que raspé la prueba y no...no me detengo a ver por qué fallé ni nada

Relator: ¿No se ponen a realizar de nuevo el ejercicio teniendo la orientación del profesor?

S2: No, ya eso te da rabia

Moderador: Y cuando en clase lo hacemos, ¿Qué está pasando con ustedes en ese momento?, porque en clases estamos realizando el examen en la pizarra...

S3: Lo único que nos damos cuenta que era simple lo que...

S2: Por eso que nos da rabia de revisarlo, porque la profesora después lo explica, como era en la prueba y uno ve que uno se lo sabe y a la hora de hacer la prueba uno no sabe por qué se equivoca... no se porque nos equivocamos, entonces le da rabia

que por ese errorcito saqué mala nota por lo que dije. Si desde la primera línea nos equivocamos en un signo, ya todo está malo.

Moderador: Entonces, ¿El error es algo que hay que tapar, que hay que esconderlo?

S4: No, al contrario, hay que estudiarlo para no cometerlo otra vez, aclarar las dudas y cualquier cosa uno preguntar porque salió esto malo aquí.

S1: Si pero uno es en la prueba cuando los aclara...profe no entiendo esto...

Moderador: Y entonces la profesora le dice este es mi momento de preguntar

S2: Uno dice profe no entiendo lo que va...

Moderador: ¿Cuál es el trabajo personal que usted hace con relación entonces a los errores?

S2: Que hay saber donde uno falló, indagar sobre cual fue el error, tratar de obtener ayuda de ustedes o de un amigo, preguntar en que fallé

S3: Hay algo que yo hago en clase cuando hacemos un ejercicio, por lo menos cuando la profesora dice que realicemos un ejercicio, yo lo hago, si lo tengo malo no lo borro, y...copio el que está bueno para comparar

Moderador: ¿Pero lo comparas?

S3: Si lo comparo...pero en el momento de clase...cuando estamos en clase...porque es una costumbre que he tenido desde siempre, que me la enseñaron, si tienes el ejercicio malo, no lo borres, porque a veces hay gente que se equivoca y borra el ejercicio

Relator: ¿Y de qué te ha servido eso?

S3: Bueno me ha servido para localizar el error, pero a la hora del examen ya es otra cosa.

Moderador: ¿Qué tipo de ayuda o apoyo requieren ustedes para superar sus debilidades en matemática?

S2: Además de la de nosotros mismos estudiar y la del profesor también que nos aclare las dudas

S4: O sea, de responder las preguntas que le hagamos.

Relator: A ver, ¿Qué tipo de ayuda crees tú que necesitas para superar todos esos errores que...?

S5: Tratar de afrontar más mis errores pues, mis equivocaciones, no deshacerme de ellos así por así, porque pasa la otra, la siguiente y vuelven

Relator: Pero, ¿Crees que sola puedes llegar a superar esos errores que tienes?

S5: Porque uno a veces no se da cuenta de sus propios errores

S3: Y ahora uno en grupo a mi me parece que uno comparte las ideas y los mismos errores y también se ayuda... o sea...es una manera de... a mi me sirve...estudiar en grupo

S5: A mí no me gusta estudiar mucho en grupo, o sea, yo prefiero...

S3: Claro, grupos de dos o tres personas bueno, ya...

S1: Es que en grupo hay personas que tiene la prueba modelo, otros le pueden aclarar las dudas

S1: Hay gente en un grupo que tiene más dudas que uno

S3: O sea, estudiando sólo las dudas...no, no...

Moderador: Si ustedes tuvieran la oportunidad de dar opinión en torno a que actividad pudiera desarrollarse en la cátedra para el tratamiento de los errores en funciones ¿Qué sugerirían?

S4: Esto mismo

Moderador: ¿Hacer actividades como éstas, de aula?

S1: Claro profesora, porque ahí todo el mundo expresa las dudas, los errores, las inquietudes que tiene.

S2: Bueno yo no sé, pero yo creo que, por ejemplo, cuando en un salón cuando hay muchos estudiantes hay veces que cuando el profesor explica, que a lo mejor quiere explicarles a todos para que todos entiendan pero por mucha gente, no se le hace fácil y tampoco a uno se le hace fácil entender porque hay mucha gente, no se siente en confianza, uno como que se cohibe cuando hay mucha gente, entonces las dudas se quedan y cuando ya uno por ejemplo que si el profesor empieza que si a motivar, que si mire, que si intervengan, entonces uno como que...Tampoco es que vamos a ver clases, nada más, cinco personas con un solo profesor, pero también con muchas personas, entonces uno no se siente así como magna-bien...nosotros aquí somos poquitos.

S1: Una guará, fue demasiado bien...

Moderador: Este ha sido un clamor pedido múltiple

Relator: Me imagino y ¿Las preparadurías no las utilizan ustedes para atacar...?

S1: Profe la mayoría de las tardes uno tiene demasiadas bromas que hacer y entonces se tiene que quedar aquí como hasta las cinco y uno tiene que hacer demasiadas bromas no le alcanza el tiempo y uno no se puede quedar, eso hay que entenderlo

S3: Si, si sirve

S4: No, claro que sirve.

S2: Esa es otra ayuda pues que nosotros tenemos, aparte de la que el profesor nos da en clase, hay las prepa, que por ejemplo una persona que se dedica también, ahí si no va mucha gente a las prepa, son pocos los que van

S5: Con Jenny porque en el salón de Fernando se pone horrible

S1: semestre pasado salí peor un gentío

S5: él explica bien pero el problema es el gentío y el saboteo que hay ella.

S4: Porque es que da mucha confianza, hace chistes y después cuando va a volver otra vez a explicar, la gente como que se alborota, quiere más chistes... algo así

Moderador: ¿Y qué le ha parecido esta actividad?

S2: Muy buena profe.

S4: Si verdad

S2: Chévere, porque nos ayuda a que nosotros podamos compartir con ustedes ,lo que nosotros sentimos...porque también nosotros tenemos cosas que sentimos y queremos decírselo pero a veces nos da pena.

S4: No le vamos a decir...mire profe... No la vamos a llamar...

S1: Uno no va a estar detrás del profesor diciéndole los errores que uno comete

Moderador: Pero es interesante, porque esa es una interacción que tenemos, somos humanos y esa es la otra parte, la otra cara que tiene el docente, pues, nosotros en matemática sobre todo hemos estado como muy aislados a los sentimiento de las personas porque nosotros andamos montados por allá en la estratosfera, en lo abstracto y sin embargo a veces nos olvidamos de que hay un humano para el cual trabajamos, con el cual interactuamos y sabemos y conocemos que sus intereses, que sus creencias, que sus valores, que sus principios, influyen notoriamente en lo que están haciendo, entonces también tenemos mucho interés en mirar ese espacio, en tener más acercamiento hacia ustedes, para mejorar el rendimiento académico y mejorar la docencia. Fue muy lindo, me gustó mucho la actividad.

Relator: Si, gracias a ustedes por haber facilitado este lugar de encuentro.

Moderador: Nos seguimos viendo, nos vemos el lunes. Si quieren se llevan eso para que revisen esos errores.

Fin de la grabación

Grupo Focal II

Moderador: Bueno muchachos, buenos días nuevamente, la idea de esta actividad de hoy... conformamos dos grupos de trabajo... consiste un poco describir y analizar algunos de los errores de ustedes en Introducción a las Matemática, en el estudio de las funciones reales. ¿Cuál es el objetivo?: el objetivo es realizar una investigación que tiene fines didácticos, para mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje en esta parte. Hoy nos hemos propuesto a describir alguno de los errores más frecuentes; un poco me traje, como punto de partida, el taller que ustedes hicieron y, las pruebas que hemos desarrollado hasta ahorita. Eso también le va a permitir a ustedes, entre otras cosas, revisar los conceptos antes de la prueba que es el lunes, un poco para afianzar un poco más allí... Vamos a describir esos errores. Vamos a tratar de categorizarlos, vamos a determinar la percepción que tienen ustedes acerca de los contenidos matemáticos que están implicados en el estudio e identificar qué aspectos subjetivos, o sea, de ustedes como personas, están asociados a esos errores. ¿Me captaron?, ¿Están dispuestos a trabajar en eso?.... ¿Es de interés para ustedes?

Participantes: Sí

Moderador: Muy bien, yo voy a ir orientando la actividad con algunas preguntas, pero nos interesa más saber de ustedes todo lo que puedan transmitirnos del fondo de su corazón, ¿Me entendieron?... vamos a tratar de eliminar posturas; por ejemplo, esa misma postura que tienen ahorita Roberto y Romel, Romel reaccionó... pudiera yo pensar que es una postura corporal que de repente no nos ayude porque nos hace pensar que están como bloqueados. El profesor Ortiz (presentación), que ya ustedes lo conocen.... ¿lo conocen?... el profesor Ortiz es Jefe de la Cátedra de Matemática I, también nos ayuda y nos asesora en nuestra investigación, y bueno el interés siempre es el proceso de enseñanza-aprendizaje. ¿Están dispuestos a trabajar estas 4 horas?.... Mentira, mentira, ja, ja, ja... En esta hora que dure la actividad... Yo quisiera iniciar... ah! Bueno, les comento que traje un guión con algunos errores que tomé, se los voy a distribuir en el momento que lleguemos a esa parte, un poco para que ustedes revisen: ¿Cuál es el error que se presenta allí? No quien lo presentó, porque esa no es la idea. La idea es simplemente estudiar el error; entonces ¿Dónde está el error?... ¿Qué factores hay asociados ese error, básicamente?... ¿Me siguen?... Bien, primero quiero iniciar haciéndoles una pregunta, y ustedes la pueden compartir entre ustedes y nosotros simplemente vamos a escuchar lo que ustedes dicen. Yo no voy a enjuiciar para nada lo que ustedes digan; todo (énfasis) lo que digan ustedes para nosotros tiene muchísimo valor. Así que dejen fluir las palabras. ¿Comprendieron?... Muy bien, la primera pregunta que les voy hacer para orientar la discusión, puede ser que yo no vuelva a preguntar mas nada, puede ser que intervenga para orientar hacia otra, para enrumbar hacia otra, pero inicio con: ¿Cuáles son sus creencias, lo que ustedes creen en relación al estudio de las funciones reales?

S1: Bueno, yo espero que, en el futuro en nuestra carrera eso nos ayude en algo, porque si lo estamos estudiando... significa que tiene un propósito tanto como si no lo estudiáramos... espero, que si de verdad tuviera un propósito le podamos tener confianza.

Docente: ¿Y tú qué piensas de eso? (pregunta a otro participante)

S2: Me imagino que todo lo que estamos viendo es para el futuro.

S3: Bueno, yo no he pensado en un futuro, sinceramente, pero yo quisiera saber el para qué nos sirve, yo simplemente me digo para que nos puede servir; ahorita, en el futuro, mañana... Yo poco lo relaciono con la vida diaria.

S2: No... yo creo que todas las matemáticas en sí, siempre en algún momento se han utilizado para algo; bien sea, quizá, esto nos da un punto para ver otras cosas, en la materia, mas adelante es que realmente le vamos a ver un fin. Pienso que si lo hemos visto en bachillerato, en algún momento lo hemos usado en la vida y que también en la universidad lo hemos utilizado por algo. El producto quedará allí.

Relator: ¿Usted que ha cursado funciones reales y siente que esa expectativa que planteaste, Va... en parte hacia la satisfacción de qué utilidad le viste a las funciones?

S3: Quizá satisfecho en parte no, porque todavía no le he encontrado ese sentido. Tengo algunas cosas... concretas...para qué me sirve, pero en verdad no lo relaciono, aquí, para que me sirva en el futuro. Pienso ahorita que quizá mas utilizamos en el día a día multiplicar, dividir, sumar y restar, eso lo usamos a diario, o sea, quizás con ese sistema administrativo que a futuro vamos a tener, eso sea lo que más va a estar ligado a nosotros, pero...funciones... no le llego todavía a ese sentido.

Relator: ¿Y usted? (Le pregunta a otro participante)

S1: Yo tampoco le encuentro mucho sentido. Personalmente en la familia mía tenemos un pequeño negocio, de él estoy a cargo, digamos ahorita de la gerencia general. Bueno, entonces ayer estuve sacando unas cuentas de contabilidad bastante simples, nada del otro mundo, pero nada tiene que ver con nada de lo que hemos visto, hasta ahora; más que todo hay problemas de: necesitamos que los jugos se enfríen por lo tanto necesitamos más hielo, y eso nos genera mas gastos; este... la carne tiene que ser de ganso y no de lomito porque es mas cara para las empanadas, pero eso no se verifica con ecuaciones de segundo o tercer grado (risas en los participantes), polinomios o algo por el estilo. En la parte funcional, ahorita... no...no es útil pues.

S3: Y por lo menos en los sábados que yo he estado en la “Coca Cola”, en “Mosaicos”, en los negocios que he atendido, básicamente el sistema administrativo es eso pues: una nómina, un personal, las relaciones humanas y... y... los números esenciales... quizás no haya...lo que si me ha identificado bastante ahorita en Introducción a la matemática ha sido la lógica, la lógica proporcional. De verdad,

compleja, te ayuda a analizar, este... da... la cuestión de las herramientas, eso sí me gusta.

Moderador: ¿Le vistes alguna utilidad en la vida diaria, en la práctica?

S3: Si, pensar las cosas más detalladamente. Todo tiene un resultado, todo tiene una solución. Simplemente hay que pensarlo y se trata de buscar la forma mas adecuada. No como las leyes, las leyes (álgebra proporcional), tienen varias formas de resolverlas... pero... no.

S4: A mí me pasa igual con funciones, yo no las uso para nada...y otras cosas.

Moderador: ¿Qué cosas?

S4: ... polinomios, ni nada de eso que hemos visto, eso se usa para nada...

Relator: O sea que pudieran darles ustedes una recomendación al programa de funciones

S1: Probablemente, algo que sea más útil, no digo que esto sea inútil, pero... es probablemente sea más útil.

S3: O sea, algo que nosotros identifiquemos más, podamos prestarle más atención, mas empeño..., algo que nos entusiasme.

S1: Ese es el principal problema de la matemática ahorita, por ejemplo Introducción o Matemática I quizás, se podría decir, porque...el uso en la carrera en sí, hay poca aplicación directa a lo que nosotros estamos aprendiendo aquí. Entonces... sin embargo desestimamos quizás un tanto otros puntos. Quizás la contabilidad la llevamos mas rápido y si vamos a ser contadores entonces nos vamos a enfocar en eso, porque a nivel como le estaba comentando, en un negocio de empanadas, lo que ahorita estoy revisando, no utilizamos límites ni derivadas,... sino bueno otro tipo de asuntos... por ejemplo el enfoque de la economía, el aumento del precio de los productos, la inflación involucra un aumento de las empanadas, así como la demanda y oferta de los productos depende de donde estén. Esos son puntos que probablemente tengamos que focalizar hacia algo más útil.

S3: Bueno y también ustedes como profesores se pueden dar cuenta también que los alumnos no tienen esa ilusión para matemática como contador, quizás lo vemos como una materia que deberíamos pasarla, pero no como una materia que hay que estudiar día a día, algo de eso... muchas cosas...

S5: Son cosas que como no tiene poca aplicación científica, todas esas materias que vamos a ver y que ya vimos, lo vemos en algún momento de nuestras vidas y prácticamente se olvidan porque son cosas que si no se practican, se olvidan. Entonces prácticamente uno pasa esas materias y después se le olvida. No las usa.

Docente: ¿Tú crees que las viste y más nunca la vuelves a tomarlas?

S5: Si... por lo menos ese tipo de objetivos: límites, derivadas, funciones, son cosas que ya las viste, ya la pasaste, feliz por ti que la pasaste.

S3: Si, si... hay otra explicación en la cuestión del cerebro... yo no me acuerdo que es, yo sé del hemisferio derecho y del izquierdo, el cerebro reptil, no me acuerdo de la parte del aprendizaje a donde llegar, el cerebro sencillamente donde no lo utiliza, hay una parte donde que si tiene una aplicación ahí si queda y nunca se te va a olvidar, pero él parece que lo coloca en otro sitio y si no lo utiliza, la desecha por sí solo y luego uno se encuentra, bueno ¿Qué pasó aquí? Bueno uno necesita que se queden las cosas y no se vayan.

Moderador: Digamos entonces que eso es una percepción, como un punto de partida con el cual usted se enfrenta cuando usted va a estudiar la matemática... ¿Pudiésemos pensar que ya eso a usted le está generando un bloqueo, un bloqueo para el aprendizaje?

S1: Si, quizás a nivel del subconsciente.

Docente: ¿A nivel de qué?

S1: Del subconsciente.

Moderador: O sea sin darte cuenta ¿No?

S1: Sin darme cuenta porque sé que tengo que pasar la materia, pero el subconsciente dice: pero ¿Para qué? ¿Para qué si no la vas a utilizar?... (Risas). Yo conozco a personas graduadas aquí en la Carabobo, administradores que te dicen: “¿Tienes problemas con matemáticas? No te preocupes, que una vez que la pases más nunca la vas a utilizar, ejerce profesionalmente”.

Moderador: ¡Ah!? ¿Te dicen eso? ¿Qué es lo que te dicen? repítemelo por favor.

S1: Este,..., *una vez que, ... no te preocupes por la matemática porque una vez que la pases, más nunca vas a utilizarla así directamente pues...*

Moderador: ¿Eso también te lo dicen a ti?

S1: Aquí mismo en la Morita, administradores, ya licenciados te dicen eso. ¿Con cual estado emocional vas a aprender? O no te interesa tanto; quizás a un médico no le interesa saber como funciona un motor, le interesa saber como funciona el sistema respiratorio, el sistema nervioso, entonces se le pasa, no le interesa saber de electrónica, de electricidad, le interesa su biología.

Moderador: ¡Qué Interesante!... y ¿Qué importancia, entonces, en función a lo que estamos diciendo ahorita, pudiera tener el aprendizaje de las funciones en sus vidas como estudiantes?

S4: Funciones lo comprendí, y sé como trabajar con eso de manera general, pero para llevarlas a la práctica eso se me hace difícil.

Docente: ¿No has escuchado acerca de otra asignatura que requiera de estos conocimientos como pre-requisito para ver otras aplicaciones?, digamos así.

S4: Algunas veces he escuchado que se necesitan algunas cosas de Introducción para ver Matemática I, pero nunca nos han dicho que las de Matemática I se necesitan para entrar en el negocio administrativo (falla de audio...)

Moderador: O sea que me van a dejar sin empleo por lo que escucho... (Risas)

S3: (Risas) No, yo me pongo en el punto de vista del profesor y quizá no es fácil escuchar esto.

Moderador: Esto que dicen es interesantísimo Romel porque nos pone a reflexionar también sobre nuestro papel ¿Me sigues?, que probablemente nosotros estemos interesados nada más en que se pase un contenido, porque está allí, un contenido programático que nos exigen, pero, y ¿La otra parte qué son ustedes? Por eso me encanta poder estar escuchándolos, ¿no?, y lo que dicen suena interesante.

Relator: Bueno, en parte, esa es la preocupación a nivel mundial, de poder llevar la matemática a la vida cotidiana. Ese es uno de los objetivos que persigue el Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas de Estados Unidos, dando estándares, dando normas donde el centro de la enseñanza de la matemática, que el alumno necesita pasar por actividades significativas para que puedan quedar en su cabeza y los pueda ayudar en la vida ¿no?, o sea, ¿ustedes saben en lo yo estuve pensando en lo que ustedes mencionan?: Que tenemos que cambiar, que tenemos que incorporar nuevas cosas, y una de estas cosas que ayuda es insertar la tecnología, porque a veces se piensa que no se usa, pero lo que pasa es que si se usa pero uno esta inconsciente de que la está usando, pero cuando sé usar Excel, nada más pasando notas, estoy trabajando con una función, cuando estoy sacando una definitiva, yo utilizo una función: cero coma dos por cero coma uno da cero coma tres, eso da una función y lo que nos esté dando depende del dominio de la función y lo de las empanadas...

Moderador: El ejemplo de las empanadas es fenomenal, porque vas a estar trabajando en función a..., y tú lo decías hace rato, que si la carne es de este tipo me permite bajar los costos, allí hay una función implícita. Es tarea nuestra ver como le damos el vuelco a la asignatura, para que eso se sienta, ¿no?, esa es tarea nuestra. Ahora, cuando a ustedes se les ha presentado un error, cuando usted está frente a un error en la asignatura, en el aprendizaje, ¿cómo lo toma usted? (risas por parte de la docente, ante la expresión corporal de uno de los sujetos, je, je, je), Zaily pela los ojos hacia arriba y esboza una sonrisa, ¡ah!

S4: Si porque realmente es como un bloqueo, cuando uno presenta un error uno se siente como que...insatisfecha, no es quizás el objetivo que uno se plantea no es: vamos a ver donde está el error o vamos a mejorar o vamos a ver dónde está la raíz o buscarle la solución, sino que uno se bloquea y... cometí un error, ¡ya!, ya no sirvo, ya no puedo; vamos a... quizás más adelante pueda.... Abandono la materia, X ó Y,

porque sí, se me ha presentado el momento en que ya presenté el error y ya, no sirvo para esto...

Relator: ¿Recuerdas algún error así que te haya hecho sentir eso?, ¿Recuerdas ese peor error?

Moderador: ¿Recuerdas el peor error que hayas cometido?

Relator: Sí, que te haya impactado

Moderador: Ahorita, sobretodo en el estudio de funciones, pero si hablamos de cualquier lado...

S4: No... no... al principio de funciones que no... o sea, que yo no sabía... no lo entendía... para mí era como que no lo voy a entender porque ya había olvidado muchas de las clases, el aprendizaje de las funciones,...falta de audio...

S1: ...falta de audio... tenemos confusión en los dominios de una función... a veces el denominador está así a veces no... confusión de los conceptos y entonces no lo practicamos...

Moderador: Confusión de los conceptos ¿no? Hasta en lo que es el dominio de una función, que es uno sólo, no es que sean varios los dominios, es uno solo

Relator: Yo creo que él se refiere cuando...

Moderador: Cuando tiene que buscar los conjuntos soluciones

Relator: Bueno, o el dominio de una función f es A , el dominio de una función g es B , entonces el dominio de f más g es...

Moderador: Aja!

S4: Es A

Relator: Entonces tienes que intersectar, siempre tiene que haber definición de ambas para poder sumarlas

S1: Exacto... pero si uno viene con la mentalidad que cuando tenemos un dominio y tenemos un resultado, ese es el resultado, más cuando tenemos varios resultados entonces creemos que esos varios resultados es el resultado completo... cosa que es ilógica... veo que hay una confusión de conceptos... que es una función y un dominio, en realidad son varias funciones y un dominio intersectado...

S3: Bueno profe, quizá yo con los errores, no... no digo que hago si el error lo cometí por descuido mío, mira, trato de no hacerlo para la próxima y si por casualidad tengo un error, que no sabía, por ignorancia, trato de ver qué carrizo pasó ahí para aprender, pues, de ambas formas.

Quizás mi error en el semestre pasado, en el verano, no fue tanto el no saber la materia sino andar muy apurado, o sea, quería ver más rápido de lo que podía ver y me pasaron mis trancazos pues... pero... porque no la conocía no, o sea, no sería la excusa porque yo me acuerdo si se notó en la última prueba yo le saqué diecisiete y esa última prueba no estaba fácil, yo sé que fácil o difícil es un juicio.

Moderador: Como siempre le ha dicho la profesora: fácil o difícil es un juicio

S3: Yo saqué diecisiete y no fue de empeño porque la quería sino porque necesitaba un veinte para poder pasar la materia. Luego, ni me esforcé pero lamentablemente no tuve un veinte sino un diecisiete pero me trajo mucha satisfacción, de que no la pasé

pero logré una buena nota en la última prueba y ahorita usted ha jugado un papel muy importante en nosotros porque no se ha basado ya en su experiencia, o sea, no ha tomado cosas que trae, ahorita ha hecho las cosas muy diferentes, no sé si será porque somos una cátedra muy... muy pequeña o porque en verdad se dio cuenta de que somos problemáticos con la materia, para ver si pasábamos, para ver si tenemos nuevas experiencias, pero por lo menos nos ha pasado a la pizarra, nos ha tratado de corregirnos de otra forma, si ha buscado la forma de que veamos a la matemática desde otro punto de

vista, y si nos ayudado mucho porque si se ha dado cuenta, hasta los momentos era el último por estudiar pero yo he venido pasando mis exámenes, o sea, todas mis pruebas. Y se ve un cambio, se ve un cambio porque si se aplican cosas diferentes se van a obtener cosas diferentes; para bien o para mal pero si se van a obtener los resultados

Moderador: Por lo que tú estás diciendo Romel yo escucho que tú hablas como que de dos tipos de errores ¿no? Los errores que tú cometes, que tú como que clasificas los errores en dos tipos ¿no? Quisiera escucharlo a ver si... voy a parafrasear un poco lo que te escuché, si estoy equivocada me puedes corregir, por favor. Tú hablabas de errores por descuido.

S3: Bueno, sería errores inconscientes y errores conscientes.

Moderador: Errores conscientes y errores inconscientes. O sea, explícame un poquito a qué tú llamas errores conscientes

S3: ¿Errores conscientes?

Moderador: Si

S3: Quizá, vamos a empezar por el inconsciente, quizá el inconsciente es el que de repente tenga una prueba x y diga: *ocho por ocho cincuenta y nueve* rápidamente, tengo la idea de lo que estoy haciendo pero hay un error inconsciente, donde una simple multiplicación se me cae todo el ejercicio; y los conscientes, yo vi esto, yo lo estudié pero no lo sé hacer, ¿Por qué? Porque no encuentro, me voy por el otro lado o tengo el problema por causas... no sé, no me acuerdo, no le hallo la solución. O sea cosas que sé como son o quizá que lo ví, pero no le encuentro un resultado porque me tranco en algunas cosas.

Moderador: ¿Qué será lo que produce esas trancas? ¿De algunas cosas?

S1: Uno podría ser la dificultad.

S3: Lo fácil o la dificultad porque a veces uno vé un problema... Uno practica ciertos problemas en clase y de repente en clase uno no se encuentra con tantos detalles que ni siquiera me le puedo acercar, y entonces ya uno se dice ¿Cómo hago? Bueno claro, eso lleva a uno analizar las cosas, a buscarle la solución, qué conchitas de mango, que cositas hay por allí, pero es eso pues, en el momento en que lo vemos es algo nuevo a lo que no se le ha buscado la solución. Es como si usted agarre un niño de básica y le muestra en la clase: dos mas dos es cuatro, cinco mas cinco es diez, y en la prueba le ponga mil setecientos cincuenta mas dos mil, es una suma ya quizá para él no va ser lo mismo de sencillo una suma de tantas cifras, por primera vista, a una de dos, aunque sea suma, algo parecido.

S2: A veces, se nos pide algo más, de matemática, que suma o resta, a veces es un exponente, nos vuelve loca la cabeza, más que una derivada, cuando se presenta un logaritmo, ¿Qué haces?, cuando se te presenta una raíz, córchale ¿Qué haces?, los dejás allí, llegas hasta ese paso.

S3: Si se acuerda en la segunda prueba tuve muchos problemas con los mínimos común múltiplo, eso es algo que uno no se acuerda como factorizar un mínimo común múltiplo y si ya no puedo factorizar, no puedo resolver el resto del problema. Ruffini, que estudiamos en estos días, que le faltaba una x , muchos pusimos x por uno, o sea la x cuando es uno, la x valía era cero...

Moderador: El coeficiente

S3: Entonces si el coeficiente no era cero, no daba el Ruffini. Me acuerdo que los muchachos le decían: “profe no da el Ruffini”,... si, si da. Efectivamente porque poníamos coeficiente uno, no sé, y era maldad, pues daba otro; si poníamos coeficiente uno no daba el ejercicio y no sabíamos el dominio de esa función. Cuando puse cero si me dio perfectamente, y tuve el ejercicio bueno. Pero son esos pequeños errores que... yo sé hacerlo por Ruffini... pero no me acordaba que el coeficiente de una x que no había es cero y si no tengo ese coeficiente no voy a resolver por el método de Ruffini y por ende no voy a resolver la función.

Moderador: Lo que nos pedían es ese entonces es determinar el dominio de la función ¿no?... por eso...

S3: Bueno profe lo que voy a decir ahorita lo voy a decir pensando mas como profesional que como alumno. Yo antes no usé mucho a Mosaicos, una promoción que se hizo hace poquito del día de los enamorados...

Moderador: Romel trabaja en Mosaicos, adentro en la cocina; así que podemos ir a comer allá... totalmente gratis... (Risas)... mentira... ja, ja, ja

Relator: Allí parece que hay una función que se está anulando ahí... (Risas...)

Moderador: Le dio cero... ja, ja, ja... (Risas)...

S3: Entonces claro, no es que tengo mucho tiempo ahí pero si me enseñaron una buena base cuando entré, esto se hace así, no se hace de esta forma y todas las cosas me las enseñaron tal y cual se deben y yo las aprendí. El día de los enamorados fue un gentío que yo no esperaba, que me salieron manos y pies, me salieron manos de todos lados, gracias a esa buena base que tuve pude sacar mis platos a tiempo; que si yo no hubiese tenido esa buena base, me hecho tres, no saco los platos, me confundo pero con esa buena base si puede superar esos obstáculos...no tuvimos ese énfasis en el bachillerato con la matemática, que esa base es la que nos sirve ahorita. Entonces, ¿Qué haría yo como profesor de Introducción a la Matemática? , yo no me tomaría quizá, no digamos un mes, pero si dos semanas, si dos semanas entrando, para puntualizar lo que esos muchachos que vienen entrando con mala base, necesitan para refrescar bien esa base que les hace falta para que vean lo que viene, se le haga más fácil. Entonces, mire nosotros vamos a empezar por lógica, pero yo voy a dejar en paz la lógica un momento, entonces nos metemos con mínimo común múltiplo, máximo común divisor, raíces cuadradas, lo que en verdad básicamente hace falta, simplemente dos semanas.

Moderador: Sí tu fueras profesor ¿Qué colocarías en esas dos semanas de contenido, que serían importantes, que son las conductas pre-requisito que están ocasionando problemas?

S3: Quizá lo diera desde el punto de vista donde ellos fallen, digamos.

Moderador: Pero para nosotros es importante desde donde tú fallas, porque ello va a decir donde falla ella, donde falla ella, y así nosotros vamos a tener un gran conjunto desde donde fallamos todos.

S3: Por ejemplo... todo lo que sea funciones... un concepto... y las raíces...

S2: Logaritmos.

Moderador: Logaritmos.

S3: Esos mismos detalles que... bueno, a uno le cuesta aquí... en esas dos semanas, o sea, lo que comprendieron, una prueba para ver que tanto visualizaron los muchachos.

Moderador: ¿Y a esa prueba le pondrías un valor?, en el... ¿Le pondrías valor? ¿Vale 5 %? ¿10 %?

S3: Claro... valor para que el mismo alumno... algo así... como que esto le va a servir,... esto va a ser parte de nota... no va a ser parte de la cátedra pero si le va a servir como nota de su definitiva, para que él se entusiasme también por ese principio.

S1: Y la guía que usted nos pasó... está bastante buena... tenía factorización.

S3: Eso ayuda a los muchachos porque, o sea, el quizás el motivarlos a hacer los ejercicios por la nota, inconcientemente... eso ayuda que el estudiante tienda a verlo.

S5: Yo antes no hacía ejercicios, que no tengo tiempo, no quería seguir estudiando, no practicaba..., A mi me pareció que fue muy bueno,... su... lo del portafolio, como tenía que hacerlo, o sea, tenía que de por sí, practicar.

S3: Mataba dos pájaros de un tiro...

Moderador: ¿Con el portafolio?

S3: Si... acumulaba nota y a la vez practicaba para los exámenes.

Moderador: Si, aunque yo siento que me hace falta pulir un poco más la técnica del portafolio, y tener como un poco más para revisar de manera más periódica los detalles y lo que ustedes le están metiendo a su portafolio para tomar decisiones que tengan que ver con ciertos ajustes en la calificación, porque eso es un trabajo que ustedes han venido haciendo a lo largo de todo el semestre, bien interesante. Bien, mire una pregunta que quiero hacerles, yo no se si ustedes me han puntualizado ¿Qué es lo que ustedes creen que hace que ustedes cometan errores?..., cuando se presentan los errores, ¿Qué es lo que ustedes creen que pasa en ustedes para que el error venga y se presente ahí y se quede plasmado en sus examen, en un ejercicio?

S3: La mente... si, la mente, la mente, yo digo que la mente es que... la mente casi que tiene un poder ilimitado, para mí la mente es algo grave pero si uno no se sienta en un examen con una mentalidad positiva al fin... ¿Por qué?, porque uno viene con otro ánimo, quizá uno se imagina que es lo que saldrá... cuando la ve por encimita... ¡Ay ya!... ya ahí con esa posición te fregaste porque entonces vas a tener esa actitud para resolverlo, en cambio que si tu vienes con la mentalidad: claro que puedo, o x,

por ahí si tienes más visión de los errores. Y entonces si tienes mente negativa, te agarran los nervios y si te agarran los nervios ahí hiciste mal, error tras error.

Moderador: ¿Tú que piensas a eso?

S5: No, yo pienso mas que es falta de ejercicios, los errores es por falta de ejercicios, de practica, de estudio, porque cuando uno está claro en lo que está haciendo eso no pasa, cuando si uno está claro en lo que está haciendo no tiene por qué presentarse... para estar claro hay que estudiar, estar más pendiente y seguro hay que estar lo más preciso.

S2: Bueno, yo siempre juraba que... cuando yo hacía las pruebas, yo venía y hacía mi prueba y... salí bien. Cuando veía la nota y había cometido cualquier error... no sé... yo había estudiado, hecho los ejercicios, he hecho curso y todo y cuando veo la nota, me caí en varias partes...

Moderador: ¿Roberto?

S1: Si,... confusiones, pequeñas confusiones de dos... de cosas que uno creía haber ya dominado, que a la hora de la prueba quizá es un hecho que da ese temor... o que se apure mucho y de verdad se le vayan las ideas, me parece una película tortuosa, como propiedades de una raíz, me pongo a pensar luego hacia otros lados, que si los elimino, que si el método, que si las desecho, entonces, como no hay conceptos bien acertados, lo que se debe hacer se hace con una raíz, uno empieza a inventar y si empieza, a inventar ya comienza a fallar como dice el amigo, si uno de verdad está conciente exactamente de lo que se está haciendo... no o sea, está consciente de lo que está haciendo... no... o sea, equivocarse es muy difícil. Saber los pasos precisos...

Relator: Por ejemplo, ¿Cómo ves tú a un alumno tú le pides dos a las tres y te diga igual a seis?

S1: Está muy mal

S2: Me ha pasado...

Relator: ¿Si? ¿Por qué crees que pasa?

S1: Ese es un error de concepto. Perfecto, no se acuerda quizá que el concepto, es elevado, es como multiplicar tres veces dos: dos por dos cuatro, cuatro por dos, ocho... y entonces uno está apurado porque tiene que sacar el ejercicio, falta un poquito de tiempo, dos por tres es seis y ya...

Relator: Y otro es el que tiene f de x sobre x, entonces tachan x con x, igual a f ¿Cómo ven ustedes eso?

S3: Bueno, una confusión de conceptos, porque cuando tenemos una x arriba y otra abajo, una en el numerador y otra en el denominador, se eliminan porque si se puede hacer con números se puede hacer con x... (Risas)... una confusión de conceptos, entonces la profesora está buscando, un asunto así, que eliminamos y nos pregunta porqué estas eliminando.

Moderador: Tanto es así que en clase colocamos el precepto de no utilizar el tilde para la cancelación; tachar, jamás... evitamos utilizarla, para que no caigan esas provocaciones perversas, pero son tantas ¿No?. Pero fíjense hay algo todavía que yo no logro precisar ¿no?, que tiene que ver con su actitud frente a los errores: ¿Qué le

pasa a usted cuando usted comete un error? Zaily casi nos dice algo, y los ojos se le pusieron así como aguados y tuvo así como... ¿Es así como algo imperdonable?

S4: No, eso depende del error. Porque su uno se equivoca... el ejemplo de dos elevado a la tres es un error garrafal.... ese es un error que sería bastante gafo porque usted ya coloca la solución, ahora si es un error de verdad como uno no sabía factorizar, entonces uno aprende o trata de aprender, bueno si..., como digamos, en uno de los ejercicios de dominio, que comentamos antes, de las funciones, ya sé que tengo que sacar el mínimo común denominador, buscando el dominio también como en el numerador, en ambos, porque en una prueba hice sólo los denominadores y no los numeradores y el ejercicio estaba malo. Yo aprendí de ese error, y se los comenté a mis compañeros cuando estábamos haciendo los ejercicios, hay que buscarle los dominios al numerador porque una vez cometí un error y aprendí del error y efectivamente, usted no contaba la familia de numeradores. Cuando uno ve este tipo de conocimientos ya bueno trata de aprender; porque sé que probablemente vuelva a caer más adelante, vuelva a caer adelante, porque entonces es peor porque me estoy cayendo con la misma piedra y bueno, los errores básicos están por descuido y son errores de la percepción, no son errores de la falla de conocimiento. Son los peores porque uno de verdad sabe como hacerlo pero se confunde, a veces pone los conjuntos abiertos, cerrados; o los cerrados abiertos y eso no es porque no lo sepas si no porque te confundiste, entonces ahí tienes que darte cuenta de que tiene que hacerlo más práctico, mas calmadamente y lo que falta del conocimiento, analizar lo que necesitas para aprender y aprenderlo.

Relator: Por ejemplo “a” mas “b”, entre paréntesis, todo al cuadrado igual a “a” cuadrado más “b” cuadrado.

S1: Muy bueno ese ejemplo, si porque es a cuadrado mas dos veces a por b más b cuadrado... la profesora nos pasó una guía a principios del semestre que, es la guía que estábamos comentando, donde hacía todos estos ejemplos y muchos otros más y de verdad los, los utilizamos en la materia que se supone que nosotros lo sabemos de bachillerato, se supone pero parece que lo estudiamos y se nos olvidó.

Moderador: Pero esta vez lo agarraron y ninguno me comentó ese tipo de error

S1: Entonces razonablemente para nosotros a cuadrado mas b cuadrado se hace así de esta forma.

Moderador: Yo voy a parar aquí,... en estas hojas que les repartí pues simple y llanamente consideré algunos errores que vi como que muy interesantes ¿No? Me encantaría que analizáramos uno por uno. Por ejemplo el uno, ¿no?, que dice determine el dominador de esa función, ¿De qué se dan cuenta allí?

S1: El numerador había... una raíz de equis mas dos...

Moderador: ¿Qué pasó allí Roberto?

S1: Aquí la persona... Yo lo hubiese puesto como esa raíz es mayor que cero pero no mayor o igual que cero.

Moderador: ¿Qué cosa? ¿En que parte me estas hablando?

S1: El siete

Moderador: Fíjate que aquí ella tomó, ella dijo raíz cuadrada de equis más dos que cero.

S1: Mayor o igual

Moderador: Mayor o igual... aja, ¿Con la raíz?

S1: Estee... (Silencio).

Moderador: Allí la condición ¿Cuál sería?

S1: Mayor o igual a cero?

Moderador: Pero, quién tiene que ser mayor que cero?

S1: x

Moderador: x más dos... ¿Qué más vieron allí? ¿De que más se dan cuenta?... Hay varios errores allí. En un mismo ejercicio hay unos cuantos...

S1: Este, del dominio, aquí está mal expresado...

Moderador: ¿Cómo así?

S1: Porque si un dominio es... sería.

Moderador: Precisen bien...agudicen ese observador... dominio de R... ¿Cómo se llamaba la función?...

S3: g

Moderador: g, esa la cambió y le puso el nombre de $\square$ y...¿ $\square$ lo utilizamos para nombrar a los números...?

S3: Reales.

Moderador: Lo otro es que no sabemos de dónde salió este dominio... si yo quiero chequear otros, a ver de dónde lo obtuvo, como lo precisó, cómo precisó que era este, es una duda que tengo. Que es interesante chequear, ¿Por qué ese y no otro?... (Silencio)... ¿Qué mas vieron ahí?..(Falla de audio)...Silencio...discusión entre los participantes...silencio...

S3: Bueno, en esta parte sería mayor e igual a menos dos

Moderador: Y escribió igual... exacto... o sea como convierte una inecuación... en una igualdad ¿no?, en una ecuación... como conduce a una “ine” con una “ecua” y aparte de ese, dése cuenta como es tan incorrectamente planteadas, o sea el planteamiento del problema tiene errores desde arriba, muestra dificultades en el planteamiento del problema. Entonces fíjense que si nos ponemos analizar los errores, es como si hay muchas categorías de errores: errores de planteamiento, errores azarosos o como tú lo llamabas, errores que se suceden inconscientemente, errores conceptuales,... es interesante ¿no? ¿Se van dando cuenta?...Entonces, nos permite a nosotros precisar donde pudieran estar las fuentes de error para evitar que los alumnos se equivoquen en eso... (Suen a timbre de celular)

S3: Profe tengo que irme.

Moderador: Oh! Romel ya no te vamos a quitar más tu tiempo... Gracias por todo Romel, muy interesante tu opinión y muy madura. Muy bien, a parte de eso vean donde dice equis cuadrado menos cuatro. Ahí no se establece una igualdad, ¿no?, no hay una ecuación allí planteada y los mismo cuando dijo ocho equis, igualmente cuando dijo ocho por cero, ¿no? O sea que es un problema a nivel de planteamiento...si... hay un error. Luego tiene una equis igual a raíz cuadrada de

cuatro... entonces equis igual a dos... y que pasó con menos dos, ¿Menos dos es un valor que satisface esa ecuación? ¿Qué pasó allí? Allí entonces tendríamos, en ese sólo ejercicio, una fuente de errores, tenemos como cuatro errores allí, tres, cuatro errores: error de notación, error de nomenclatura o lenguaje, llamándolo así error de planteamiento del problema, errores conceptuales y procedimentales... ahora fíjense en la dos, en la pregunta: determine el dominio de la función con f de x igual a esa expresión que tenemos allí (señalando hoja de listado de errores, anexo), entonces, en el supuesto de que el dominio esté bien determinado viene dado por R menos... me le volteó todos los signos a las raíces... ¿Qué pasa con eso? Porque este no es un error de cálculo, sino un error procedimental, ... también es un error conceptual... establecer para qué están aplicando la regla de Ruffini... para qué están haciendo eso ¿no?

S1: Quizá eso viene de... cuando tenemos los denominadores aquí, que nos da la raíz y la raíz se inversa... o sea, cuando hacemos por lo menos la factorización...

Moderador: ¡Ah la factorización!, pero es que cuando factorizas eso es otra cosa.

S1: Exactamente, pero descompones pues... yo por lo menos no cometí ese error, pues se supone que cuando nos dan en la factorización un número, que nos da positivo, es su inversa... tiene negativo entonces aquí parece que esta persona se equivocó y creía que lo que daba lo tenía que invertir.

Moderador: Lo opuesto ¿verdad?

S1: Lo opuesto, sí...

Moderador: Y también tenemos errores en el manejo del lenguaje, se dan cuenta?... eso es importante... Bien, pero fíjense en este error que me llama muchísimo la atención, yo lo quería resaltar con un marcador y no lo resalté,

S1: ¿El menos diez, mas catorce?

Moderador: ¡Aja! Menos diez mas catorce le dé veinticuatro, pero esta estudiante insiste en su error... ¿Por qué insiste? Porque ella luego se da cuenta que no le da el residuo cero y ella comienza a factorizar para que le dé... ella se da cuenta mas abajo... ella no se devuelve a pensar que puede tener un error, sino que ella persiste en el error... ¿Se dieron cuenta?... porque luego abajo dos por una dos, dos menos uno... ella allí borra mucho y colocaba mas uno, y colocaba menos uno... pero ella lo que quería era forzar la cosa, ¿no?, para que le diera luego al final del cuento, cero; pero no se detenía a pensar atrás, de donde derivaba, no había constatación, no... ahí yo siento que hay como que una necesidad de persistir en el error... miren, vean el tres... grafique la función definida por f de equis igual a tres si equis es menor que menos tres, pero igual a menos el cuadrado de equis menos uno si equis es mayor o igual a menos tres y menor que tres, o sea si equis está comprendido entre menos tres y tres, inclusive o f de equis es igual menos equis si equis es mayor que tres. Entonces esta bachiller... bueno, varios lo hicieron, para equis perteneciente al intervalo menos infinito, menos tres, y construye esta tabla de valores: si equis vale menos dos, “y” vale uno, si equis vale menos tres, “y” vale cero... ¿De dónde se obtuvieron esos valores que están allí?

S2: Pero ella escribe e igual a tres...

Moderador: Si...pareciera que está consciente que es una función constante, pero hay algo... luego en el siguiente intervalo, tiene “y” igual a menos, equis al cuadrado, menos uno. Mmm, ese es otro error que he precisado, que es la falta de paréntesis y luego dice si equis vale menos tres, “y” vale ocho. Allí hay otro error... y es común... y este es que multiplicaron los signos sin tomar en cuenta que es el menos tres el que está elevado al cuadrado, o sea, la prioridad que tienen las operaciones... y luego que no tipifica el tipo de función que es, y dice que la gráfica es una semirrecta siendo una función Cuadrática, que la gráfica es una...

S1 y S2: Parábola.

Moderador: Parábola. Bien, allí hay varios errores...

Relator: Y... ¿Es una función Afín?

S1: Es una función a trozos

Moderador: Esa es una función a trozos. Y luego, vean este otro: Hallar el dominio de la función y graficar ¿no? Esa es una función que no está definida... lo primero que hay que definir es lo que es el dominio, no está definida para equis igual a menos cinco pero bueno, fíjense la cantidad de cosas que hace ¿no? La persona se da cuenta que tiene que dividir entre equis menos cinco, por eso toma equis menos cinco raíz y... vean lo que le queda en la división sintética que efectúa... luego dice que equis es igual a seis. Luego dice equis es igual a menos cinco y luego construye una función lineal, equis más “y” menos seis igual a cero, donde “y” es igual a seis menos equis ¿Cómo obtiene esa función lineal? No está claro... y, luego dice que el dominio son todos los reales menos cinco y seis... Por supuesto la gráfica que elaboró es incorrecta, cuando lo que teníamos que hacer era convertir esa función, factorizando el numerador, podíamos eliminar el factor que produce la indeterminación y ver que gráfica nos podía quedar, la cual no iba a estar definida por equis igual a menos cinco, chequear la posible imagen que pudiera tener, hacia donde tienden las imágenes cuando la equis tiende a menos cinco, entonces se graficaba una parábola pero con una “hueco” en este punto, que era el punto... y no lo precisó tampoco... creo que es el punto... creo que era menos cinco, diez y nueve... muy bien, y en la pregunta cinco: Sabiendo que f de x es igual a tanto determine, en su mínima expresión, a f de equis mas h menos f de x sobre h , con h diferente de cero; entonces escribe f de x es igual... y es un error pero así como generalizado... f de x es igual a... y puede ser que el otro lado de la igualdad esté perfectamente desarrollado, pero dice que f de x es igual a ... y termina entonces teniendo f dos reglas de correspondencia: la de arriba y la de abajo... la de arriba es menos dos equis cuadrado menos cinco equis mas tres y la de abajo menos cuatro equis menos cinco,... con eso busco las imágenes...

Relator: ¿Cómo llegó a ese resultado?

Moderador: Lo supo hacer, lo que pasa es que abrevié todo, todo el proceso ahorita, pero a lo que me refiero es que hay como una falta de brújula, hacia donde yo voy. ¿Qué es lo que me están pidiendo en el ejercicio? ¿Qué es lo que esperan de mí?... y entonces preciso una falta de atención también. Quiero chequear con ustedes a ver

qué piensan... silencio... pausa... ¿No les ha pasado que escriben f de equis en lugar de f de equis mas h menos f de equis sobre h?

S1: Si, porque creemos que estamos buscando a f de x... pausa... y como es un error, se supone que es inofensivo, porque aunque el procedimiento esté bueno, bueno se supone que eso no es tomado en cuenta...

Moderador: Ah... que eso no es tomado en cuenta

S1: Exacto, exacto, porque si uno se equivoca aquí en f de x, la profesora dice que está malo pero está bueno el procedimiento, así que es inofensivo... o sea, que es error que quizá no... no es dañino directamente... hay que ponerle un nombre a eso... no lo podemos dejar así.

Moderador: Bien muchachos, hasta aquí hemos obtenido una información muy valiosa, pero yo quiero cerrar preguntándoles ¿Qué trabajo personal realizan ustedes para superar los errores?

S2: Siempre busco orientación...

Moderador: ¿Dónde?

S2: Bien, por lo menos en matemáticas, busco alguien con quien estudio, alguien que me explique, o busco ejercicios que estén resueltos

S4: Bueno, yo en matemática veo dónde está el error, y en una próxima, poder decir que sé donde estuvo el error.

S1: Trato de puntualizar el error y resolverlo correctamente con un compañero que haya tenido en su prueba su ejercicio bueno y veo cómo se hace y luego tratar de mantenerlo en la mente,... cómo él hacía eso y cuando se presente ese procedimiento sé cómo se resuelve y así voy acumulando como una cantidad de errores pasados que los voy resolviendo. Entonces, cuando me enfrente a otro ejercicio ya me acuerdo cuáles eran los procedimientos que apliqué, porque una vez tuve esos errores y como ya los resolví... entonces trato de buscar todas las formas posibles, con un amigo, con profesores, con libros, con pruebas modelo. Recuerdo que en el verano yo siempre compraba las pruebas modelo y revisaba pues cuales eran mis errores, y bueno, creo que resolví muchos errores así, pero a veces eran tantos que... yo decía cónchale no puede ser... ahorita aunque yo he visto la materia varias veces todavía tengo algunos errores que son bobos pues, pero son errores que persisten, que quizás antes no los había visto o que no los había tratado así tan puntualmente, sin embargo, he resuelto muchos, muchos de los errores que tenía.

Moderador: ¿Te parece que es importante hacer un trabajo con los errores?

S1: Si

Moderador: ¿Por qué?

S1: Si, porque con menos errores como éste: menos diez mas catorce son errores que...

Fin de la grabación

ANEXO C

ALGUNOS EJEMPLOS DE ERRORES ENCONTRADOS EN EL ESTUDIO DE LAS FUNCIONES REALES

1. Determinar el dominio de la función g definida por:

$$g(x) = \frac{\sqrt{x+2}}{8x} - \frac{\sqrt[3]{x^5 + x^3 - 1}}{x^2 - 4}$$

El estudiante ha procedido de la siguiente forma:

$$\begin{array}{c} 8x \\ 8.0 \\ x^2 - 4 \\ x = 2 \end{array} \quad \begin{array}{c} \sqrt{x+2} > 0 \\ x = -2 \end{array} \quad \text{Dom} = (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$$

2. Determinar el dominio de la función f definida por:

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^4 - 15x^2 - 10x + 24}$$

El estudiante ha procedido de la siguiente forma:

	1	0	-15	-10	24
-1	-1	1	14	-24	
	1	-1	-14	24	0
2	2	2	-24		
	1	+1	-12	0	
4	4	12			
	1	3	0		
-3	-3				
	1	0			

$$\text{Dom}_f = \{-4, 1, -2, 3\}$$

3. Grafique la función definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 3 & \text{si } x < -3 \\ x^2 - 1 & \text{si } -3 \leq x \leq 3 \\ -x & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

En este ejemplo el estudiante procedió de la forma siguiente:

para $x \in (-\infty, -3)$

x	-2	-3
y	1	0

y=3

para $x \in [-3, 3]$: $y = -x^2 - 1$

x	-3	3
y	8	-10

$-(-3)^2 - 1 = 8$

“La gráfica es una semirrecta”

4. Hallar el dominio de f con $f(x) = \frac{x^3 + 5x^2 - 6x - 30}{x + 5}$ y grafique la función

El estudiante procedió en la forma siguiente:

	1	5	-6	-30
-5	-5	0	+30	
	1	0	-6	0

$$\begin{aligned} x &= 6 \\ x &= -5 \\ x+y-6 &= 0 \\ y &= 6-x \end{aligned}$$

x	1	2	3
y	5	4	3

$$Dom_f = \mathbb{R} - \{-5, 6\}$$

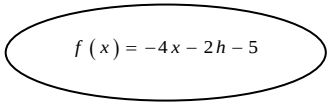
$$Rgo_f = \mathbb{R}$$

5. Sabiendo que $f(x) = -2x^2 - 5x + 3$ determine, en su mínima expresión a:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}, h \neq 0$$

El estudiante procedió de la manera siguiente:

$$f(x) = \frac{-2(x+h)^2 - 5(x+h) + 3 - (-2x^2 - 5x + 3)}{h}$$


$$f(x) = -4x - 2h - 5$$