

# Modelo matemático para la solución numérica a una ecuación diferencial lineal unidimensional de orden dos, utilizando residuos ponderados

Luis Di Stefano<sup>\*,a</sup>, Maria Cruz<sup>b</sup>, Edwin Oviedo<sup>a</sup>

<sup>a</sup>*Departamento de Física, Estudios Básicos, Facultad de Ingeniería, Universidad de Carabobo, Valencia, Venezuela.*

<sup>b</sup>*Departamento de Matemática, Estudios Básicos, Facultad de Ingeniería, Universidad de Carabobo, Valencia, Venezuela.*

---

## Resumen.-

En este artículo se desarrolla un procedimiento matemático computacional basado en la minimización del error cuadrático total, aplicado para los métodos de colocación por puntos y colocación por subdominios, clasificados como de residuos ponderados, en la solución numérica de una ecuación diferencial lineal unidimensional de orden dos, se expone una breve reseña de los aspectos teóricos para la aplicación de los métodos y la propuesta planteada, se efectuaron pruebas a tres casos con valores iniciales y de frontera respectivamente, con solución analítica, resultando en todos la disminución considerable del error de aproximación en comparación con la solución real.

**Palabras clave:** Residuos Ponderados, Colocación por Puntos, Colocación por Subdominios, procedimiento matemático.

## Mathematical model for the numerical solution of a linear differential equation of order two unidimensional using weighted residuals

### Abstract.-

This paper develops a mathematical procedure based on minimizing computational square error total, applied for method of point collocation and collocation by subdomains, classified as weighted residuals in the numerical solution of a linear differential equation of order two dimensional, gives a brief overview of the theoretical aspects to the application of the methods and the proposal made, were tested three theoretical cases with initial and boundary values respectively, with analytical solution, resulting in all the considerable decrease in the approximation error compared to the real solution.

**Keywords:** weighted residuals, point collocation, collocation by subdomain, mathematical procedure

Recibido: enero 2013

Aceptado: marzo 2013.

### 1. Introduction

En ingeniería cuando se requiere encontrar una descripción cuantitativa de un fenómeno físico se modela un conjunto de ecuaciones, que en general son ecuaciones diferenciales ordinarias o

en derivadas parciales, en una región o dominio y de condiciones de contorno e iniciales específicas. El segundo paso es resolver el problema de valor inicial para un conjunto de datos. En este punto es donde aparecen los inconvenientes al tratar de obtener la solución analítica, dicha solución es posible si las ecuaciones son simples y están definidas en un dominio de geometría simple. No obstante, si el número de variables aumenta, suelen encontrarse dificultades para resolver la ecuación diferencial.

Para solventar esta situación se replantea el pro-

---

\* Autor para correspondencia

Correo-e: ldi@uc.edu.ve (Luis Di Stefano)

blema inicial de una manera puramente algebraica, encontrar una solución numérica utilizando alguna de las formas de discretización del dominio. Diversas técnicas han sido desarrolladas para la solución numérica de problemas con valores iniciales o de frontera. Una de las formas de discretización es el proceso de diferencias Finitas y Elementos Finitos. Dentro de esta clasificación se encuentran los métodos de residuos ponderados para la solución numérica de ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden y de condiciones iniciales preestablecidas. Entre estos métodos podemos mencionar. El Método de Galerkin, Método de Colocación por Puntos, Método de Colocación por Subdominios, Método de los Momentos y el Método de los Mínimos Cuadrados [1]. Son ampliamente conocidos y detallados en la literatura específica, existen trabajos de investigación [2] y [3], en los cuales se utilizan para resolver numéricamente ecuaciones diferenciales.

El objetivo General de esta investigación es, diseñar una metodología matemática para disminuir el error cuadrático medio de aproximación, para los métodos de colocación por puntos y colocación por subdominios, en la solución numérica a una ecuación diferencial lineal unidimensional de orden dos aumentando el número puntos o subdominios, pero manteniendo constantes el número de coeficientes asociados a las funciones de prueba. Los métodos numéricos son fundamentales en los cálculos y solución de problemas aplicados a las ciencias, las ecuaciones diferenciales modelan problemas de ingeniería, es esencial investigar y desarrollar procedimientos que permitan mayor exactitud en el resultado numérico aplicado.

## 2. Aproximación numérica a la solución de ecuaciones diferenciales por residuos ponderados

Sea  $V$  un espacio lineal [4], sea  $\Omega \subseteq V$  un dominio y  $\Gamma$  el borde o contorno del dominio. Consideremos la ecuación diferencial escrita de la siguiente forma general [5]

$$A(x) = L(x) + f = 0, \text{ en el dominio } \Omega, \quad (1)$$

donde,  $L$  es un operador diferencial lineal de segundo orden,  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es una función independiente de  $x$ , continua en todo  $\Omega$ , sea  $x$  la variable independiente.

Con las condiciones de borde

$$M(x) - h = 0 \text{ en } \Gamma,$$

donde  $M$  es un operador diferencial lineal que satisface las condiciones de frontera,  $h$  es una función con valores preestablecidos.

Se establece en los métodos de residuos ponderados la aproximación  $u(x)$ , a la solución analítica que denotamos como  $y$ , por medio de una expansión

$$y(x) \approx u(x) = \phi_0 + \sum_{i=1}^n c_i \phi_i(x), \quad (2)$$

en este caso la función  $\phi_0$  es la encargada de cumplir las condiciones de borde e iniciales y las funciones de prueba linealmente independientes  $\{\phi_i\}_{i=1}^n$  las encargadas de ajustar la solución en el dominio. Estas funciones son elegidas tal que cumplan con las condiciones  $M(\phi_0) - h = 0$  y  $M(\phi_i) = 0$ , puesto que  $u(x)$  satisface las condiciones de borde, cualquiera sean los valores que adopten los coeficientes  $c_i$ . La Ecuación (2) puede utilizarse para aproximar a la solución analítica  $u$ , ya que las funciones  $\phi_0$  y  $\phi_i$  son continuas y derivables en todo  $\Omega$  tenemos

$$\begin{aligned} y(x) &\approx u(x) = \phi_0 + \sum_{i=1}^n c_i \phi_i(x) \\ \frac{dy}{dx} &\approx \frac{du}{dx} = \frac{d\phi_0}{dx} + \sum_{i=1}^n c_i \frac{d\phi_i(x)}{dx} \\ \frac{d^2y}{dx^2} &\approx \frac{d^2u}{dx^2} = \frac{d^2\phi_0}{dx^2} + \sum_{i=1}^n c_i \frac{d^2\phi_i(x)}{dx^2} \end{aligned}$$

Asumiendo  $x$  como la variable independiente en los casos descritos. Las aproximaciones a  $y$ ,  $\frac{dy}{dx}$  y  $\frac{d^2y}{dx^2}$  son reemplazadas en la Ecuación diferencial (1) para obtener la expresión del

residuo que denotamos como  $R_\Omega$ .

$$\begin{aligned} R_\Omega &= L\left(\phi_0 + \sum_{i=1}^n c_i \phi_i(x)\right) + f(x) \\ &= L(\phi_0) + L\left(\sum_{i=1}^n c_i \phi_i(x)\right) + f(x). \end{aligned} \quad (3)$$

Lo primero que debemos definir es el error o residuo de aproximación, al que denominaremos en forma general

$$R_\Omega = y(x) - u(x),$$

$R_\Omega$  también dependerá de la posición  $x$  dentro del dominio (dado que  $y$  dependen de  $x$ ), el objetivo fundamental es disminuir el residuo en general en todo el dominio  $\Omega$ , para ello, se requiere de un conjunto de integrales del error sobre el dominio  $\Omega$  que ponderadas matemáticamente de diferentes maneras sean igual a cero.

$$\int_{\Omega} R_\Omega W_j d\Omega = \int_{\Omega} (y(x) - u(x)) W_j d\Omega = 0, \quad (4)$$

siendo las  $W_j, j = 1, \dots, n$  funciones de peso, linealmente independientes en  $\Omega \subseteq V$ .

Para que se cumpla la condición general de convergencia, que  $u \rightarrow y$  cuando  $n \rightarrow \infty$ , se debe exigir que la Ecuación (4) se satisfaga para toda  $W_j$  cuando  $n \rightarrow \infty$ . Esto será cierto si y solo si  $R_\Omega \rightarrow 0$  en todos los puntos del dominio  $\Omega$ . Cuando se reemplaza la Ecuación (3) en (4) se obtiene un sistema de ecuaciones lineales de orden  $n \times n$ . Resolviendo este sistema de ecuaciones obtenemos los valores de los parámetros  $c_j$  buscados

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} L(\phi_0) W_j d\Omega + \sum_{i=1}^n c_i \int_{\Omega} L(\phi_i) W_j d\Omega \\ + \int_{\Omega} f W_j d\Omega = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

El sistema de ecuaciones (5) expresado en forma matricial es  $A_{n \times n} c = b_{n \times 1}$ , siendo los elementos de  $A_{n \times n}$  y  $b_{n \times 1}$  de la forma

$$\begin{aligned} a_{ij} &= \int_{\Omega} L(\phi_i) W_j d\Omega \\ b_j &= \int_{\Omega} L(\phi_0) W_j d\Omega + \int_{\Omega} f W_j d\Omega. \end{aligned}$$

con  $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n$ .

Los elementos del arreglo  $c_{n \times 1}$  representan los coeficientes a determinar. Para poder resolver las integrales, previamente debemos elegir al conjunto de funciones de peso  $W_j$ . Varios conjuntos de funciones de peso pueden ser utilizadas, cada uno conduce a un método de aproximación por residuos ponderados diferente. Brevemente se realiza una reseña del *método de colocación por puntos* y el *método de colocación por subdominios*.

### 2.1. Método de colocación por puntos

En este método se impone que el residuo sea nulo en  $n$  puntos  $(x_i, y_i)$  del dominio y en los puntos del contorno donde se hayan impuesto condiciones naturales de borde. Esto es equivalente a adoptar como funciones de ponderación a las funciones *delta de Dirac*, siendo  $x$  la variable independiente tenemos [6] y [5]

$$\int_{\Omega} R_\Omega \delta(x - x_j) d\Omega = R_\Omega = 0. \quad (6)$$

### 2.2. Método de colocación por subdominios

En este método se impone que el residuo sea nulo en  $n$  subregiones  $W_i$  del dominio y  $G_i$  de la parte del contorno donde se hayan impuesto condiciones naturales de borde [6] y [5]

$$\int_{\Omega} R_\Omega d\Omega = 0. \quad (7)$$

## 3. Metodología propuesta

### 3.1. Desarrollo matemático del Modelo

En este aspecto se desarrollaron los modelos matemáticos propuestos con el objetivo de disminuir el error de aproximación de los métodos de colocación por puntos y colocación por subdominios, fundamentado principalmente en la minimización del error cuadrático medio total, aumentando el número de particiones en la discretización inicial efectuada, disminuyendo el tamaño

de las mismas e incrementando la cantidad de puntos en el dominio del problema de valor inicial, esto permite que la función residual ( $R_\Omega$  error o residuo de aproximación) sea cero en mayor cantidad de intervalos del dominio  $\Omega$ , obteniendo como resultado mejores aproximaciones.

### 3.2. Implementación de los métodos de residuos ponderados

Esta fase de la investigación se diseñó el programa en Maple 14 (versión académica), para aplicar los métodos de residuos ponderados, evaluando las ecuaciones diferenciales a estudiar. Este programa permite la determinación y visualización de la solución analítica, la solución aproximada del método numérico, la representación gráfica de ambas y la determinación del error de aproximación.

### 3.3. Implementación del procedimiento matemático y comparación del error medio cuadrático

En este objetivo se evalúa computacionalmente la propuesta con el incremento en el número de particiones y puntos del dominio, permitiendo observar en cada caso la función de aproximación y el error medio cuadrático en comparación con la solución analítica.

El programa desarrollado permite la visualización de los errores obtenidos. Para la determinación del error se establece el siguiente criterio. Sea  $(x_i, y_j)$  un conjunto de  $n$  puntos en el plano real, sea  $y$  la solución analítica a un problema de valor inicial en un dominio  $\Omega = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x \leq b\}$ , sea  $u$  la solución de aproximación. El criterio de “mejor aproximación” puede variar, pero en general se basa en aquél que minimice una “acumulación” del error individual (en cada punto) sobre el conjunto total [7]. En primer lugar, el error (con signo positivo o negativo) de la función  $u$  en un solo punto  $(x_i, y_j)$ , se define como

$$e_i = y(x_i) - u(x_i).$$

En general tratamos de medir y minimizar el error en todo el conjunto de la aproximación, el

error cuadrático medio (**Ecm**) se determina de la siguiente manera

$$\mathbf{Ecm} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n e_i^2}{N}}.$$

### 3.4. Aplicación al método de colocación por puntos

El desarrollo matemático del método de colocación por puntos es sencillo. Supóngase que se escoge en el intervalo  $[a, b]$  una partición regular para  $n$  elementos, y seleccionamos  $n$  puntos  $x_i, i = 1, \dots, n$  separados a una distancia  $h = 1/n$ , la solución aproximada  $u(x)$  debe satisfacer la ecuación diferencial en cada punto, obtenemos un sistema de ecuaciones que podemos escribir de la forma

$$\begin{cases} R(x_1, c_1, \dots, c_n) = 0, \\ R(x_2, c_1, \dots, c_n) = 0, \\ \vdots \\ R(x_n, c_1, \dots, c_n) = 0. \end{cases} \quad (8)$$

Resolviendo el Sistema (8) se obtienen los coeficientes  $c_j, j = 1, \dots, n$  que hacen al residuo de la solución aproximada cero en los puntos  $x_i, i = 1, \dots, n$ , pero quedan infinitos puntos donde el residuo puede ser distinto de cero, lo cual puede implicar un valor numérico grande. La propuesta de este trabajo es aumentar el número de particiones, disminuyendo el tamaño de las mismas e incrementando la cantidad de puntos  $x_i$  en el intervalo  $[a, b]$ , ahora el problema se presenta en la solución de sistemas de ecuaciones lineales que generan  $c_n$  incógnitas, cuya solución puede ser matemáticamente complicada, que en la mayoría de los casos analizados produce un mayor error absoluto de aproximación, para resolver esta situación se propone no incrementar el número de coeficientes de la forma  $c_j, j = 1, \dots, n$ , se escoge en el intervalo  $[a, b]$  una partición regular de  $n + m$  y seleccionamos puntos separados a una distancia  $h = 1/(n + m)$ , obteniéndose el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} R(x_1, c_1, \dots, c_n) = 0, \\ \vdots \\ R(x_{n+m}, c_1, \dots, c_n) = 0. \end{cases} \quad (9)$$

EL Sistema (9) es incompatible a menos que existan ecuaciones linealmente dependientes de otras, por lo tanto se plantea resolverlo minimizando el error cuadrático total. Lo cual implica la monización dada en la Ecuación (10)

$$\text{mín } E = |R(x_1, c_1, \dots, c_n)|^2 + \dots + |R(x_{n+m}, c_1, \dots, c_n)|^2, \quad (10)$$

siendo  $E$  función de los  $c_j$ ,  $j = 1, \dots, n$  ya que los valores de  $x_i$  se sustituyen en la ecuación residual.

Para que ocurra un mínimo es necesario que

$$\frac{\partial E}{\partial c_j} = 0, \quad j = 1, \dots, n.$$

### 3.5. Aplicación al método de colocación por subdominios

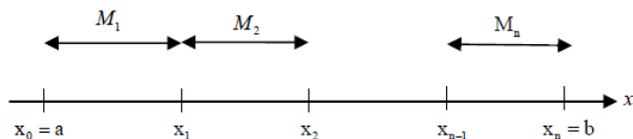


Figura 1: Subintervalos en el Dominio.

Suponer que en el intervalo  $[a, b]$  efectuamos una partición en  $M_n$  subintervalos como lo muestra la Figura 1.

Obtenemos un sistema de ecuaciones

$$\int_{x_0=a}^{x_1} R(x, c_1, \dots, c_n) W_j(x) dx = 0$$

$$\vdots$$

$$\int_{x_{n-1}}^{x_n=b} R(x, c_1, \dots, c_n) W_j(x) dx = 0.$$

La propuesta de este trabajo es aumentar el número de subdominios en los cuales el error residual sea cero, sin que esto genere un incremento en la cantidad de coeficientes de la forma  $c_j$   $j = 1, \dots, n$ . Se escoge en el intervalo  $[a, b]$  una partición  $M_{n+m}$  en subintervalos, obteniéndose un

sistema de ecuaciones que podemos escribir de la forma

$$\int_{x_0=a}^{x_1} R(x, c_1, \dots, c_n) W_j(x) dx = 0,$$

$$\vdots$$

$$\int_{x_{n-1}}^{x_n} R(x, c_1, \dots, c_n) W_j(x) dx = 0, \quad (11)$$

$$\vdots$$

$$\int_{x_{n+m-1}}^{x_{n+m}=b} R(x, c_1, \dots, c_n) W_j(x) dx = 0.$$

Se plantea resolverlo, minimizando el error cuadrático total en cada subdominio.

mín  $E$ ,

con

$$E = \left| \int_{x_0=a}^{x_1} R(x, c_1, \dots, c_n) dx \right|^2 + \dots$$

$$+ \left| \int_{x_{n-1}}^{x_n} R(x, c_1, \dots, c_n) dx \right|^2 + \dots$$

$$+ \left| \int_{x_{n+m-1}}^{x_{n+m}} R(x, c_1, \dots, c_n) dx \right|^2, \quad (12)$$

$$(13)$$

siendo  $E$  función de los  $c_j$   $j = 1, \dots, n$  ya que la variable  $x$  es resuelta con la integral definida.

Para que ocurra un mínimo es necesario que

$$\frac{\partial E}{\partial c_j} = 0 \quad j = 1, \dots, n.$$

### 4. Procedimiento implementado (Propuesta)

La Figura 2 muestra el procedimiento implementado.

Con el propósito hacer algunas comparaciones entre los métodos de residuos ponderados mencionados, estudiamos en detalles tres casos teóricos, extraídos de la bibliografía.

```

print('\n----- COLOCACION POR PUNTOS PROPUESTA  -\n');
print('\n          PUNTOS DE COLOCACION EN EL DOMINIO\n');
if xi=0 then for i from xi to N+m-1 do x[i+1]:=x[i]+p/(N+m+1): print (x[i+1]); od;
eqnset:={seq(subs(x=x[i+1],RCP),i=xi..N+m-1)}: else for i from xi to N+m do
x[i]:=x[i-1]+p/(N+m+1): print (x[i]); od; eqnset:={seq(subs(x=x[i],RCP),i=xi..N+m)}: end if:
varsCPP := seq(c[i],i=1..N): ECP:=0:
if xi=0 then for i from xi to N+m-1 do ECP:=ECP+eqnset[i+1]^2: od:
else for i from xi to N+m do ECP:=ECP+eqnset[i]^2: od: end if;
eqnE:={seq((diff(ECP,c[i]))=0,i=1..N)}:
print('\n          SISTEMA DE ECUACIONES\n');
if xi=0 then for i from xi to N+m-1 do print(evalf(sort(eqnset[i+1]))=0);
od; else for i from xi to N+m do
print(evalf(sort(eqnset[i]))=0);
od; end if; print('\n          SOLUCION AL SISTEMA DE ECUACIONES\n');
sols:=evalf(solve(eqnE,\{varsCPP\})); assign(sols);
erCPP:=0: ERCPP:=0: ERCPPT:=0: FpCPP := unapply(PCPP,x):
erCPP := seq(evalf((FpCPP((i))-Fe((i)))^(2)),i=xi..xf,0.01):
for i from 1 to 100 do ERCPP:=ERCPP+erCPP[i]: od:
ERCPPT:=sqrt(ERCPP/100):
print('\n----- COLOCACION POR SUBDOMINIOS PROPUESTA  -\n');
sys := []:
print('\n          SUBDOMINIOS (DISCRETIZACION DEL DOMINIO)\n');
x[0]:=0: x[1]:=0: x[0]:=xi: x[1]:=x[0]+p/(N+m): print([x[0],x[1]]);
for i from 1 to m+N-1 do x[i]:=x[i-1]+p/(N+m): x[i+1]:=x[i]+p/(N+m) : print([x[i],x[i+1]]); od:
sys := [op(sys),int(RCSP*(1),x=x[0]..x[1]+p/(N+m))] : for i from 1 to m+N-1 do
sys := [op(sys),int(RCSP*(1),x=x[i-1]+p/(N+m)..x[i]+p/(N+m))] : od:
vars := seq(e[i],i=1..N): E:=0: for i from 1 to N+m do E:=E+sys[i]\symbol{94}2: od:
print('\n          SISTEMA DE ECUACIONES\n'); for i from 1 to m+N do
evalf(sort(sys[i]))=0 : od; eqnset1:={seq(diff(E,e[i])=0,i=1..N)}:
print('\n          SOLUCION AL SISTEMA DE ECUACIONES\n');
sol:=evalf(solve(eqnset1,\{vars\})); assign(sol); FpCSP := unapply(PCSP,x): erCSP:=0:

```

Figura 2: **Procedimiento**

#### 4.1. Aplicación Caso 1

Tomamos el siguiente ejemplo de [8], Pagina 205. Se propone resolver el siguiente problema de valor inicial, usando 4 funciones de prueba en el intervalo  $[0, 1]$ , para  $n = 3$

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + 2y = x + 1, \quad (14)$$

con las condiciones Iniciales

$$y(0) = 3, \quad \frac{dy}{dx}(0) = 0.$$

La solución exacta es

$$y(x) = -\frac{2}{5}e^x \sin x + 2e^x \cos x + 1 + \frac{1}{2}x$$

Las funciones de pruebas deben satisfacer las condiciones iniciales y ser linealmente independientes en el dominio  $\Omega = [0, 1]$ . De tal forma

que la solución asumida al problema planteado se pueda expresar como una combinación lineal. De la Ecuación (2), escogemos polinomios de la forma general  $\{\phi_i(x)\}_{i=1}^3 = x^{i+1}$

$$\phi_0(x) = 3, \quad \phi_1(x) = x^2, \quad \phi_2(x) = x^3, \quad \phi_3(x) = x^4.$$

En general tenemos que

$$u(x) = 3 + c_1x^2 + c_2x^3 + c_3x^4$$

Podemos observar que de acuerdo a las condiciones iniciales del problema. Si  $x = 0$ ,  $u(0) = 3$  y  $\frac{du}{dx}(0) = 0$ . Si sustituimos la solución aproximada en la Ecuación diferencial (14) obtenemos la

función residual  $R(x)$

$$R(x) = (2c_1 + 5) + (6c_2 - 4c_1 - 1)x + (12c_3 - 6c_2 + 2c_1)x^2 + (-8c_3 + 2c_2)x^3 + 2c_3x^4. \quad (15)$$

#### 4.2. Método de colocación por puntos (MCP)

Aplicamos la Ecuación (6), en los puntos de colocación del dominio  $x_1 = \frac{1}{3}$ ,  $x_2 = \frac{2}{3}$  y  $x_3 = 1$ . Sustituimos cada punto en la Ecuación residual (15) y obtenemos un sistema de ecuaciones lineales  $3 \times 3$ . Cuya solución es la función

$$u(x) = 3 - 2,370822906x^2 - 1,725305462x^3 - 0,1389665832x^4.$$

#### 4.3. Método de colocación por subdominio (MSD)

Aplicamos la Ecuación (7) para cada  $W_j(x)$ . En el intervalo  $[0, 1]$  efectuamos una partición  $M_3$  en subintervalos conformados como  $M_1 = [0, \frac{1}{3}]$ ,  $M_2 = [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$  y  $M_3 = [\frac{2}{3}, 1]$ , siendo  $W_j(x) = 1$ ,  $j = 1, 2, 3$  en cada subintervalo, generando un sistema de ecuaciones lineales  $3 \times 3$ . La función de aproximación, con los coeficientes determinados es

$$u(x) = 3 - 2,418675270x^2 - 1,740557981x^3 - 0,1152970203x^4.$$

## 5. Análisis y discusión de resultados

Utilizando la metodología para la propuesta descrita, se ensayo aumentando en número de puntos y subdominios en el intervalo de estudio, con la finalidad de obtener una función de aproximación en cada caso, que nos permite determinar el error de aproximación entre la solución analítica y la aproximada.

#### 5.1. Método de colocación por puntos propuesta (MCP)

Seleccionamos seis puntos ( $n = 3$ ,  $m = 3$ ) de colocación equidistantes en el dominio  $x_1 = \frac{1}{7}$ ,  $x_2 = \frac{2}{7}$ ,  $x_3 = \frac{3}{7}$ ,  $x_4 = \frac{4}{7}$ ,  $x_5 = \frac{5}{7}$  y  $x_6 = \frac{6}{7}$ .

Sustituyendo en Ecuación residual (15), tenemos un sistema de seis Ecuaciones con tres incógnitas (9), minimizando el error cuadrático medio (10), se obtienen los coeficientes y la función de aproximación

$$u(x) = 3 - 2,3862711106x^2 - 1,724222897x^3 - 0,1355269472x^4.$$

#### 5.2. Método de colocación por subdominios propuesta (MSDP)

Seleccionamos seis subintervalos ( $n = 3$ ,  $m = 3$ ) en el dominio  $M_1 = [0, \frac{1}{6}]$ ,  $M_2 = [\frac{1}{6}, \frac{2}{6}]$ ,  $M_3 = [\frac{2}{6}, \frac{4}{6}]$ ,  $M_4 = [\frac{3}{6}, \frac{4}{6}]$ ,  $M_5 = [\frac{4}{6}, \frac{5}{6}]$  y  $M_6 = [\frac{5}{6}, 1]$

Obteniendo un sistema de seis Ecuaciones con tres incógnitas (11), minimizando el error cuadrático medio (12), se obtienen los coeficientes y la función de aproximación

$$u(x) = 3 - 2,426861981x^2 - 1,732107233x^3 - 0,1182271062x^4.$$

Table 1: Error Medio Cuadrático,  $n = 3$ ,  $m = 3$

Método	Ecm
MCP	0,0224353782
MSD	0,0032034037
MCP	0,0115326717
MSDP	0,0010638822

El procedimiento desarrollado permite el cálculo del error cuadrático medio, para este ejemplo está en la Tabla 1.

Procedimos a determinar el error medio cuadrático aumentando el número de puntos y subintervalos en el dominio, se obtiene la Tabla 2.

En la Figura 3 y 4 se representa la solución analítica, las soluciones por MCP, MSD y las

Table 2: Error Cuadrático Medio, Aplicación de los Métodos, Caso I,  $n = 3$ 

	Método MCP		Método MSD	
	Ecm	0,0224353782	Ecm	0,0032034037
$m$	Método MCPP		Método MSDP	
	Ecm	% Disminución	Ecm	% Disminución
1	0,0170741070	23,897	0,0018279149	42,938
2	0,0137684270	38,631	0,0012995356	59,433
3	0,0115326717	48,596	0,0010638822	66,789
4	0,0099221220	55,775	0,0009489464	70,377
5	0,0087077989	61,187	0,0008887222	72,257
6	0,0077601096	65,411	0,0008550902	73,307
10	0,0054195047	75,844	0,0008094966	74,730
20	0,0031373631	86,016	0,0007956770	75,162
30	0,0022583191	89,934	0,0007940899	75,211
40	0,0018043900	91,957	0,0007936568	75,225
50	0,0015338900	93,163	0,0007934820	75,230
100	0,0010378690	95,374	0,0007932764	75,236

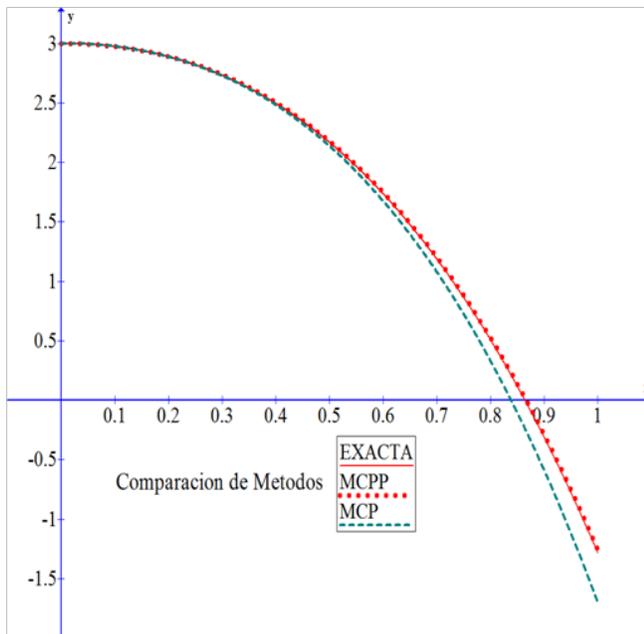


Figura 3: Solución Exacta, MCP y Solución por Método de Colocación por Puntos Propuesta (MCPP).

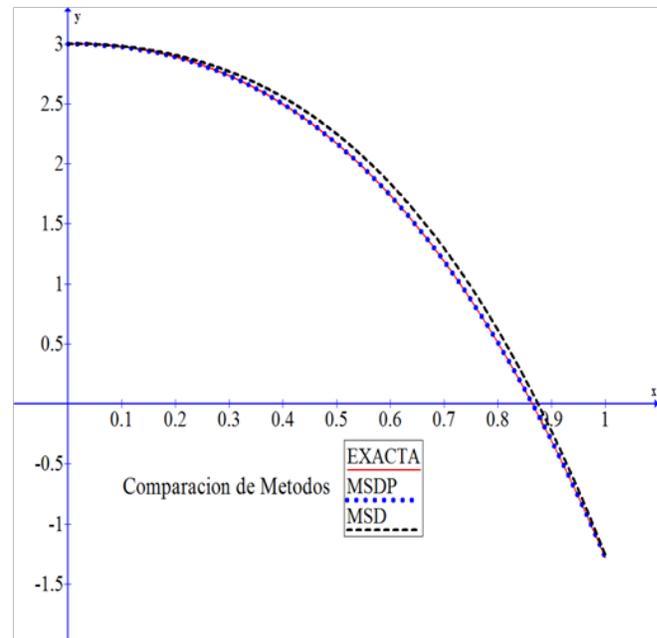


Figura 4: Solución Exacta, MSD y Solución Método de Colocación por Subdominios Propuesta. (MSDP).

soluciones propuestas por MCPP y MSDP respectivamente, para  $n = 3$  y  $m = 10$ , podemos observar cómo se modela con gran precisión la solución exacta usando el modelo propuesto.

En Figura 5 se puede apreciar como disminuye el error medio cuadrático al aumentar el número

de puntos y subintervalos en el dominio.

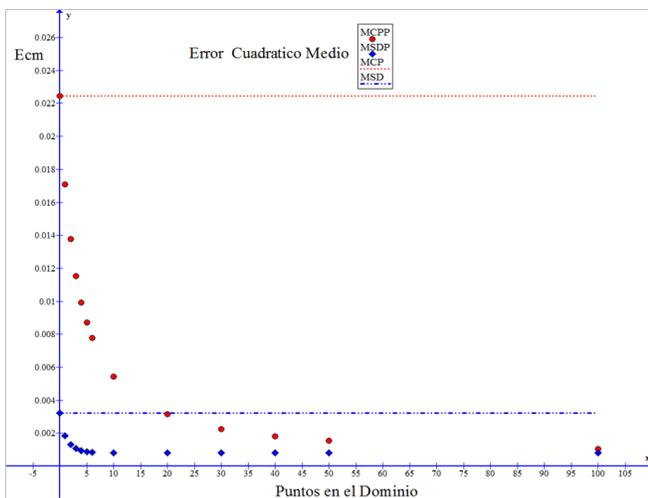


Figura 5: Error Medio Cuadrático Caso I.

### 5.3. Aplicación Caso II

Tomamos el siguiente ejemplo de [9] página 20. Se propone resolver el Problema (16) de valor inicial, usando 5 funciones de prueba en el intervalo [0, 1], para  $n = 4$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - 6y = 0, \quad (16)$$

con las condiciones iniciales  $y(0) = 6, \frac{dy}{dx}(0) = 2$

La solución exacta es

$$y(x) = 2e^{-3x} + 4e^{2x}$$

La función de aproximación es

$$u(x) = 6 + 2x + c_1x^2 + c_2x^3 + c_3x^4 + c_4x^5.$$

La Tabla 3 presenta el error medio cuadrático para este caso.

### 6. Aplicación Caso III

Con la finalidad de aplicar los procedimientos descritos a un caso práctico, se plantea resolver la Ecuación de Difusión-Advección (17) en su forma unidimensional y estacionaria para el estudio de dispersión de contaminantes en cuerpos de agua

$$-\frac{d}{dx^2} \left( k \frac{d\phi}{dx} \right) + u \frac{d\phi}{dx} - f(x) = 0, \quad (17)$$

Se propone un problema de Difusión-Advección con coeficientes constantes y una función de generación cubica [10], el problema se describe matemáticamente en la Ecuación (18). Se usan 3 funciones de prueba en el intervalo [0, 1], para  $n = 3$

$$-\frac{d\phi}{dx^2} + 400 \frac{d\phi}{dx} = x^3, \quad (18)$$

con las condiciones de frontera  $\phi(0) = \phi(1) = 0$

La solución exacta es

$$y(x) = 3/(1,28 \times 10^{10})x + 3/(6,4 \times 10^7)x^2 + 1/(1,6 \times 10^5)x^3 + 1/(1,6 \times 10^3)x^2 + 8080603/(1,28 \times 10^{10}) \frac{e^{400x}}{e^{400} - 1} + 8080603/(1,28 \times 10^{10}) \frac{1}{e^{400} - 1}.$$

La función de aproximación

$$u(x) = c_1x(x - 1) + c_2x^2(x - 1) + c_3x^3(x - 1).$$

La Tabla 4 presenta el error medio cuadrático para este caso.

### 7. Conclusiones

La propuesta se aplico a tres ecuaciones diferenciales con solución analítica. Con la finalidad de obtener el error medio cuadrático se procedió a comparar la respectiva solución analítica con la función de aproximación obtenida en un intervalo del dominio de la ecuación diferencial. Las ecuaciones que hemos considerado eran relativamente simples. Sin embargo, son ejemplos representativos de tipos característicos e importantes de ecuaciones diferenciales, el método propuesto se puede aplicar a casos más generales, el programa desarrollado permite aproximar en distintos intervalos del dominio.

Table 3: Error cuadrático medio, aplicación de los métodos, Caso II,  $n = 4$ 

	Método MCP		Método MSD	
	Ecm	0,0632217133	Ecm	0,0047220393
$m$	Método MCP		Método MSDP	
	Ecm	% Disminución	Ecm	% Disminución
1	0,0502072130	20,585	0,0035632630	24,
2	0,0416301284	34,152	0,0030183665	36,079
3	0,0355766880	43,727	0,0027345080	42,091
4	0,0310872094	50,828	0,0025734551	45,501
5	0,0276305513	56,296	0,0024752946	47,580
6	0,0248901138	60,630	0,0022988582	51,316
10	0,0179608814	71,591	0,0022988582	51,316
20	0,0109666965	82,654	0,0022377755	52,610
30	0,0081782112	87,064	0,0022242683	52,896
40	0,0066913558	89,416	0,0022191342	53,005
50	0,0057730631	90,869	0,0022166374	53,058
100	0,0039077130	93,819	0,0022131009	53,133

Para el Caso I, se observa que al aumentar el número de intervalos de 3 hasta 100, usando el método propuesto de colocación por puntos, el error medio cuadrático disminuye en 95,374 % ( $E_{mc} = 0,0010378690$ ) en comparación al obtenido inicialmente ( $E_{mc} = 0,0224353782$ ), también se puede apreciar que utilizando la propuesta para el método de colocación por subdominios el error medio cuadrático disminuye en 75,236 % ( $E_{mc} = 0,0007932764$ ) en comparación al obtenido inicialmente ( $E_{mc} = 0,0032034037$ ).

Para el Caso II, con la propuesta para el método de colocación por puntos, el error medio cuadrático disminuye en 93,819 % y utilizando la propuesta para el método de colocación por subdominios el error medio cuadrático disminuye en 53,133 %. Para el Caso III la disminución de los errores es 96,962 % y 91,473 % respectivamente.

Con estos resultados podemos concluir que la metodología propuesta permite la disminución considerable en el error de aproximación en la aplicación de los métodos de colocación por puntos y colocación por subdominios, en la solución numérica a una ecuación diferencial

lineal unidimensional de orden dos.

Una ventaja adicional del procedimiento propuesto, es que mantiene constante el número de coeficientes de la forma, lo cual implica menor tiempo de cálculo y procesamiento de la solución.

Es necesario resaltar que la adecuada escogencia de la funciones de aproximación en cada caso conlleva a resultados más precisos, así como también un número mayor de puntos y subintervalos en el dominio. Para investigaciones futuras se plantea probar la metodología con ecuaciones diferenciales no lineales.

Table 4: Error cuadrático medio, aplicación de los métodos, Caso III,  $n = 3$ 

	Método MCP		Método MSD	
	Ecm	0,0098987911	Ecm	0,0042138411
$m$	Método MCP		Método MSDP	
	Ecm	% Disminución	Ecm	% Disminución
1	0,0013590286	86,271	0,0013601421	67,722
2	0,0008579195	91,333	0,0009601409	77,215
3	0,0007573677	92,349	0,0006601400	84,334
4	0,0005564535	94,379	0,0004601381	89,080
5	0,0003546498	96,417	0,0003601332	91,454
6	0,0003494991	96,469	0,0003601119	91,454
10	0,0003433461	96,531	0,0003600735	91,455
20	0,0003405730	96,559	0,0003600515	91,456
30	0,0003367513	96,598	0,0003600160	91,456
40	0,0003311315	96,655	0,0003599517	91,458
50	0,0003218341	96,749	0,0003598094	91,461
100	0,0003007170	96,962	0,0003593208	91,473

## Referencias

advección dominante, Rev. Fac. Ing. Univ. Antioquia , 52, 134–146.

- [1] Desai, Y. , Shah. E, (2010). Finite Element Method with applications in Engineering, Pearson, Dorling Kinderley India
- [2] Zhu, T. , Atluri, S. A (1998). modified collocation method and a penalty formulation for enforcing the essential boundary conditions in the element free Galerkin method, Article Computational Mechanics volume 21 (3), 211–222
- [3] Prössdorf. S., Schmidt, G. (2006), A Finite Element Collocation Method for Singular Integral Equations, Article first published online: 12 Nov 2006, WILEY-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, Weinheim
- [4] Apóstol, T. (2006), Calculo con funciones de una variable, con una introducción al algebra lineal, Editorial Reverte S.A. Volumen 1
- [5] Skiba, Y. (2005), Métodos y esquemas numéricos: Un Análisis Computacional, Universidad Nacional Autónoma de México
- [6] Bruce, F. (1978). The method of weighted residuals and variational principles, United Kindow Edition , Volume 87, Academy Press
- [7] Burden, R. , Faires D. (2007), Análisis numérico, Edición 7, International Thomson editores, México
- [8] Henry. E, Penney ,D. (2001). Ecuaciones Diferenciales, Edición 4, Prentice Hall, México.
- [9] Shepley, R (1980) . Differential equations, Blaisdell publishing company.
- [10] Galeano, C., Garzón, D., Mantilla, J. (2010), Comparación del método de líneas características y el método Petrov Galerkin en contracorriente para problemas de